CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Secondo esonero - 7 Febbraio 2008 -

Traccia 1. [Punteggio: 7]

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} y = k \\ x + 2y - 2z = 1 + k \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Determinare gli eventuali valori di k in corrispondenza dei quali il sistema risulta compatibile. Per detti valori, ricavare le corrispondenti soluzioni.

Traccia 2. [Punteggio: 2.a:2, 2.b:1, 2.c:2, 2.d:2, 2.e:2, 2.f:2]

Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvere i seguenti quesiti.

2.a Dire se $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti o dipendenti.

2.b Qual è la dimensione del sottospazio V generato dai tre vettori?

2.c Calcolare $V^\perp$, il sottospazio ortogonale di V. Qual è la sua dimensione?

2.d Il vettore $\mathbf{v} = [6,\ 4,\ 1,\ -5]^T$ appartiene a V, a $V^\perp$ o a nessuno dei due?

2.e Il vettore $\mathbf{w} = [4,\ -3,\ -2,\ 2]^T$ appartiene a V, a $V^\perp$ o a nessuno dei due?

2.f Si consideri il vettore $\mathbf{z} = [2,\ 7,\ 3,\ -7]^T$. Ricordando che $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^\perp$, decomporre $\mathbf{z}$ nella somma di due vettori: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, con $\mathbf{x} \in V$ ed $\mathbf{y} \in V^\perp$.

Traccia 3. [Punteggio: 3.a:2, 3.b:2, 3.c:2, 3.d:1, 3.e:2, 3.f:2]

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si discutano i seguenti punti.

3.a Si dia la definizione di nucleo ($\ker(A)$) ed immagine ($\mathrm{Im}(A)$) della matrice A.

3.b Si provi che, in effetti, $\ker(A)$ ed $\mathrm{Im}(A)$ risultano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ rispettivamente.

3.c Si provi che $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \ker(A^T)$.

3.d Si provi che $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A^T)$.

3.e Si supponga $m = n$. Si provi che $\det(A) \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette come unica soluzione quella nulla: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Suggerimento: per provare una delle due implicazioni, può essere utile sfruttare il teorema di Rouché-Capelli.

3.f Si supponga $m \geq n$. Si provi che, se $\mathrm{rank}(A)$ è massimo, allora $\det(A^T A) \neq 0$.
Suggerimento: sfruttare le proprietà enunciate ai punti 3.e e 3.c.

Traccia 4. [Punteggio: 7]

Data una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la norma infinito di A è il numero reale (non negativo) definito dalla seguente espressione:

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

<u>ESEMPI</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \max\{(1+6+5),\ (2+8+3)\} = \max\{12,\ 13\} = 13;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \max\{(1+2),\ (3+2),\ (1+3)\} = \max\{3,\ 5,\ 4\} = 5.$$

Si scriva una function Scilab (Matlab) che abbia:

INPUT: A matrice;

OUTPUT: *norma*, norma infinito della matrice A.