1) MONETA IN ACQUA $V_L = 30\,m/s$

Il quesito propone il caso in cui un corpo in caduta libera con massa costante risente della resistenza aerodinamica dell'acqua. Sappiamo che un corpo in caduta libera è sottoposto alla forza peso $F = mg$. Si ipotizza che la resistenza aerodinamica sia proporzionale alla velocità e si parametrizza tale dipendenza attraverso la proporzionalità. Perciò la forza risultante che agisce sul corpo è:
$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$. Si risolve l'equazione differenziale (lineare del primo ordine) che è data dalla somma della soluzione dell'omogenea associata e della soluzione particolare.

Soluzione dell'omogenea associata: $\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v = -\frac{v}{\tau}$, con $\tau = \frac{m}{b}$

$\int\frac{dv}{v} = \int-\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \log v = -\frac{t}{\tau} + \log c \Rightarrow v = ce^{-t/\tau}$

Soluzione particolare $= 0 = \frac{dv}{dt}$; $g - \frac{b}{m}V_L \Rightarrow V_L = \frac{m}{b}g = \tau g$

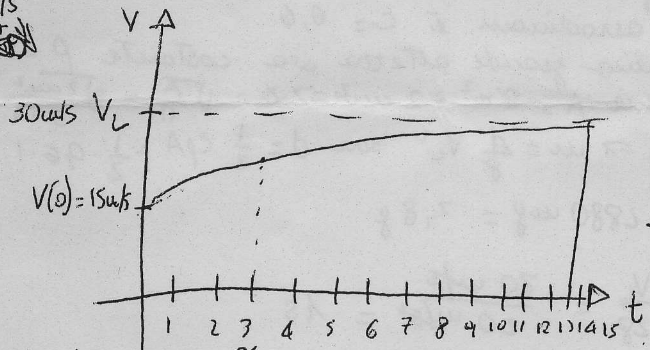
Soluzione generale $V(t) = g\tau + ce^{-t/\tau}$ dove V_L è la velocità limite, infatti per $t \to \infty$ $V = V_L$ e ciò si ha quando $mg = bv$, cioè $\frac{dv}{dt} = 0$; c è la costante di integrazione che si ricava dalle condizioni iniziali ($V(0)$).

Nel caso considerato la moneta viene lanciata in acqua per cui la velocità iniziale non può essere nulla. Inoltre la velocità limite viene raggiunta solo nel momento in cui tocca fondo perciò è da escludere anche il caso della caduta con velocità invariata. *

a) $0 < V(0) < V_L = 30\,m/s$

Si può assumere $V(0) = 15\,m/s$. Calcolando il valore di τ da $V_L = \frac{m}{b}g = \tau g$

$\tau = \frac{V_L}{g} = \frac{30\,m/s}{10\,m/s^2} = 3\,s$ Si ha $c = V(0) - g\tau = 15\,m/s - 30\,m/s = -15\,m/s$ $\boxed{C = \left(-\frac{1}{2}\right)V_L}$



~~Per t = τ la velocità raggiunge circa~~ i 2/3 della velocità limite

per τ (cioè $t = 3\,s$) $\rightarrow V_\tau = V_L\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$V_L\left(1 - \frac{1}{2}e^{-1}\right) \rightarrow V_L\left(1 - \frac{1}{2e}\right) \simeq 24\,m/s$

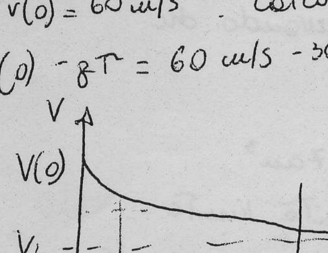
Si nota che la velocità passa drasticamente da circa 30 m/s a 0 m/s dato che dopo $5\tau = 15\,s$ il corpo ha raggiunto praticamente la velocità limite. Infatti $V(15) = 29{,}9\,m/s$ per $T = \tau$. Si ha una velocità pari circa 24 m/s che equivale all'80% della velocità limite.

b) $V(0) > V_L = 30\,m/s$

Si può assumere $v(0) = 60\,m/s$. Calcolando il valore di τ da $V_L = \frac{m}{b}g = \tau g$ $\tau = \frac{V_L}{g} = 3\,s$

Si ha $c = V(0) - g\tau = 60\,m/s - 30\,m/s = 30\,m/s$ $C = V_L \cdot (1)$

$v = V_L(1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$



La velocità passa drasticamente da circa 30 m/s a 0 m/s dato che dopo $5\tau = 15\,s$ il corpo ha raggiunto praticamente la velocità limite e quindi il fondo; infatti $V(15) \simeq 30\,m/s$. Per $T = \tau$ si ha una velocità pari a circa 40 m/s che equivale a $4/3\,V_L$ cioè superiore alla velocità limite del 36,8% $= \frac{1}{e}$

$V_\tau = V_L\left(1 + 1\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow V_L\left(1 + e^{-1}\right) \Rightarrow V_L\left(1 + \frac{1}{e}\right) \simeq 40\,m/s$

CADUTA IN ARIA . 2 BIGLIE

Il quesito propone un caso in cui il corpo è in caduta libera con massa costante e risente dell'effetto della resistenza aerodinamica dell'aria. Infatti ad un certo punto della caduta, la velocità rimane costante, cioè l'accelerazione diventa nulla. In accordo con le legge di Newton la forza risultante:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - dv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{dv^2}{m}$$

Nel nostro caso, dato che una delle due biglie ha una sezione 4 volte dell'altra ci si aspetta che risente maggiormente della resistenza aerodinamica e quindi raggiunge in un tempo più breve la velocità limite ($m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg = dv^2$). In realtà la biglia più grande ha anche massa più grande e quindi il tempo in cui raggiungerà la velocità limite non dipende solo dalla sezione ma anche della massa ($\frac{dv}{dt} = g - \frac{d}{m}v^2$).

Le biglie vengono lasciate cadere perciò la velocità iniziale è zero e l'accelerazione è g, man mano la velocità aumenta l'accelerazione diminuisce ($\frac{dv}{dt} = g - \frac{d}{m}v^2$) finché non diventa nulla $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow g = \frac{d}{m}v^2$. Risolvendo l'equazione differenziale differenziale, ottenuta applicando la legge di Newton con $V(0) = 0$ e quindi $V < V_L$ si ha: $V = V_L \frac{e^{\frac{t}{T}} - 1}{e^{\frac{t}{T}} + 1}$, $T = \frac{V_L}{2g}$

V_L è una soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$0 = \frac{dv}{dt} = g - \frac{d}{m}v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{m}{d}g \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{m}{d}g}$ il parametro d si può determinare esplicitando, sia pure parzialmente, la sua dipendenza da alcune caratteristiche del sistema. Si trova che $d = \frac{1}{2}c\rho A$

C = coeffic. di penetraz. aerodin.
ρ = densità del fluido
A = area della sezione iniziale opposta perpendic. alla direz. del moto

Per la biglia più grande si ha: $V_L = \sqrt{g\frac{m}{d}} = 20\ m/s$

Sapendo che la biglia è sferica, il coeffic. aerodinam. è $C = 0,6$

Si assume che la densità dell'aria ad una grande altezza sia costante $\rho = 1,2\ mg/cm^3$

Si suppone che la biglia abbia una sezione $A = \pi r^2 = 2\ cm^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\ cm^2}{3.14}} = 0,8\ cm$

Si ottiene la massa della biglia $V_L^2 = g\frac{m}{d} \Rightarrow m = \frac{d}{g}V_L^2$ con $d = \frac{1}{2}C\rho A = \frac{1}{2}\cdot 0,6\cdot 1.2\ \frac{mg}{cm^3}\cdot 2\ cm^2 = 0,72\ \frac{mg}{cm}$

quindi $m = \frac{0,72\ \frac{mg}{cm}}{1000\ \frac{cm}{s^2}} \cdot \frac{4000000\ cm^2}{s^2} = 2880\ mg = 2,8\ g$

Si ottiene il tempo caratteristico $T = \frac{V_L}{2g} = \frac{20\ m/s}{20\ m/s^2} = 1s$

Per la biglia più piccola:

Sapendo che una biglia è sferica, il coefficiente aerodinam. è $C = 0,6$

Si assume che la densità dell'aria ad una grande altezza sia costante $\rho = 1,2\ mg/cm^3$

La biglia più piccola ha sezione $A_p = \frac{1}{4}A_g = 0,5\ cm^2$ quindi da $A = \pi r^2$ si ha:

$r = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}A_g}{\pi}} = 0,4\ cm$ Si ottiene il parametro $d = \frac{1}{2}C\rho A = \frac{1}{2}\cdot 0,6\cdot 1,2\ \frac{mg}{cm^3}\ 0,5\ cm^2 = 0.18\ \frac{mg}{cm}$

Sapendo che la massa è data dal volume × la densità e osservando che

$m_g = V_g\rho \Rightarrow \rho = \frac{m_g}{V_g} = \frac{2.8\ g}{\frac{4}{3}\pi(0,8\ cm)^3} = 1,3\ \frac{g}{cm^3}$

$V_p = \frac{4}{3}\pi r_p^3 = \frac{4}{3}r_p A_p = \frac{4}{3}r_p\frac{A_g}{4} = \frac{4}{3}\cdot 0,4\ cm\cdot 0.5\ cm^2 = 0,27\ cm^3$

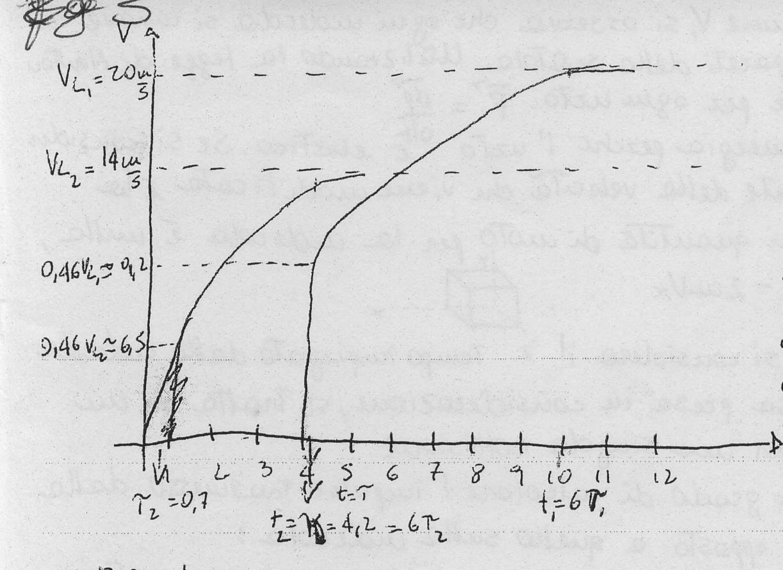
Si ha $m_p = V_p\rho = 0.27\ cm^3\cdot\frac{1,3\ g}{cm^3} = 0.35\ g$ Si ottiene la velocità limite

$V_L = \sqrt{g\frac{m}{d}} = \sqrt{1000\ \frac{cm}{s^2}\cdot\frac{350\ mg}{0.18\ mg}\ cm} = 1394\ \frac{cm}{s} = 13.94\ m/s \simeq 14\ m/s$

Si ottiene il tempo caratteristico

$T = \frac{V_L}{2g} = \frac{14\ m/s}{20\ m/s^2} = 0,7\ s$

✱ sostituire nella biglia più piccola il rapporto



Si nota per entrambe le curve che rappresentano l'evoluzione della velocità nel tempo, che per $t = \tau$ ha $V = 0{,}46 V_L$, quindi la velocità è pari al 46% della velocità limite e per $t = 6\tau$ la velocità è praticamente uguale alla velocità limite infatti differisce di circa 0.1 m/s. Si nota inoltre che nonostante la biglia più grande risulta maggiormente dalle resist. aerodin., e quindi dovrebbe raggiungere rapidamente la velocità limite, l'equazione della velocità ha un tempo caratteristico τ superiore a quello della biglia più piccola. Ciò è dovuto al fattore che τ è proporz. alla massa della biglia $\tau = \frac{V_L}{2g} = \frac{\sqrt{g\frac{m}{d}}}{2g}$. Quindi come si nota nel grafico, quando la biglia più grande viene lasciata, l'altra ha quasi raggiunto la velocità limite, infatti per $t = 4{,}2$

$V = 13{,}9$ m/s

2) OSCILLAZIONI

1) Le costanti che caratterizzano l'oscillazione sono: A, che è l'ampiezza massima iniziale (ottenibile solo nel caso in cui la costante di fase φ sia nulla); τ, tempo necessario affinché l'ampiezza si riduca a 1/e (pari a circa il 36,8%) del valore iniziale; ω, pulsazione che definisce il periodo $T = 2\pi/\omega$, cioè il tempo necessario perché si compia un intero ciclo di oscillazione (e.g. il tempo che separa due massimi); φ, costante di fase, cioè la fase iniziale (argomento della funzione sinusoidale per $t = 0$).

2) La funzione che descrive l'oscillazione diventa: $y(t) = -20e^{\frac{t}{4}} \cos(1{,}57t + 3{,}14) = -20e^{\frac{t}{4}} \cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)$

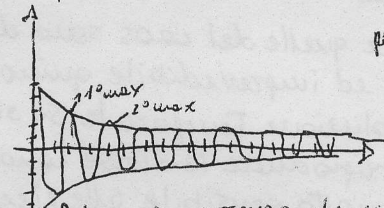
a. Il periodo di oscillazione è: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ s

b. I massimi si hanno quando cos vale -1, cioè quando la fase è $\frac{\pi}{2}t + \pi = (2k\cancel{+1})\pi$ (per $k = 0, 1 \ldots$)

per cui il secondo massimo si ha per $\frac{\pi}{2}t + \pi = (2 \cdot 2\cancel{+1})\pi \Rightarrow t = (4\pi - \pi) \cdot \frac{2}{\pi} = 8$ s

c. Dire che il sistema è ~~pr~~ praticamente fermo equivale a dire che il sistema abbia un'ampiezza superiore all'1% dell'ampiezza massima $20e^{\frac{t}{4}} > 0.1 \cdot 20 \Rightarrow t > 4 \ln \frac{1}{0.01} > 18.4$ s

d. nell'istante $t = 0$



per trovare le intersezioni con l'asse del tempo

$\cos(\pi t + \pi) = 0 \Rightarrow \pi t + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} - \pi + k\pi}{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} + k\pi}{\pi} = \frac{\pi(-\frac{1}{2} + k)}{\pi}$ MAX $2k$ MIN $2k+1$

Pulsaz. in assenza di smorzam. è: $\omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} = \sqrt{1{,}57^2 + \frac{1}{4^2}} = \sqrt{2{,}5274} = 1{,}59$

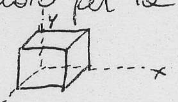
3) URTO CONTRO LE PARETI

In termodinamica, la branca della fisica che si occupa delle trasformazioni subite dai sistemi in seguito a scambi di energia termica con altri sistemi o con l'esterno, è stato elaborato un modello basato sull'ipotesi, ampiamente confermata, che la materia abbia struttura atomica: il modello cinetico dei gas perfetti. Lo scopo di questo modello è quello di collegare le proprietà macroscopiche (variazioni di pressione, volume e temperatura) alle proprietà microscopiche (velocità delle molecole ed energia interna) di un gas. Pressione, volume e temperatura sono variabili di stato, cioè individuano uno stato attraverso i valori che possono assumere e dipendono soltanto dallo stato iniziale e finale di una trasformazione, non dal modo in cui essa avviene. Le suddette variabili di stato sono legate tra loro nell'equazione di stato dei gas perfetti (legge del gas ideale): $P = R\frac{T}{V}$ con R costante universale del gas.

Il modello cinetico e la legge del gas ideale, sono validi per qualsiasi gas che rispetti le seguenti condizioni: - le molecole sono tutte uguali tra loro (differenze non apprezzabili); - il moto di ciascuna molecola deve rispettare le leggi di Newton; - le molecole sono in gran numero ($> 10^{23}$); - il volume delle singole molecole è trascurabile rispetto al volume totale; - le molecole sono sottoposte solo alla forza impulsiva dovute agli urti mentre la risultante delle altre forze è nulla; - le molecole urtano tra loro e le pareti in modo elastico. - non ci sono interazioni tra le molecole e tra loro e le pareti.

Considerando una mole di gas in una scatola di volume V, si osserva che ogni molecola si muove in modo casuale, urtando contro le altre molecole e le pareti della scatola. Utilizzando la legge di Newton si può calcolare l'impulso che agisce sulla parete per ogni urto. $\vec{F} = \frac{dp}{dt}$

Nella collisione con la parete non c'è perdita di energia perché l'urto è elastico. Se si considera la collisione lungo la parete y-z, l'unica componente della velocità che viene modificata è la componente lungo l'asse x, perciò la variazione di quantità di moto per la molecola è nulla, mentre per la parete yz è $\Delta p_x = (-mV_x) - (mV_x) = -2mV_x$



Come intervallo di tempo in cui avviene la collisione si considera il tempo impiegato dalla molecola per urtare sulla parete opposta e tornare sulla stessa presa in considerazione; si tratta di un tempo sicuramente superiore a quello impiegato per una singola collisione.

Quindi stimando (per eccesso): $\Delta t = \frac{2l}{V_x}$ Si è in grado di calcolare l'impulso trasmesso dalla singola molecola sulla parete yz che è uguale ed opposto a quello sulla molecola:

$F_i = -\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mV_x}{\frac{2l}{V_{x_i}}} = \frac{m}{l}V^2_{x_i}$. Dato che la pressione è dovuta alla forza per unità di superficie e la forza complessiva agente sulla parete yz è data dalla somma delle forze dovute a ciascuna delle N_0 molecole ($N_0 = 6*10^{23}$ è il numero di Avogadro) contenute in una mole: $F = \sum_{i=1}^{N_0} F_i = \frac{m}{l}\sum_{i=1}^{N_0} V^2_{x_i}$. Detto l il lato del contenitore si ha $P = \frac{F}{l^2}$ e sapendo che la velocità quadratica media è $\overline{V^2_x} = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} V^2_{x_i}$ si ha $P = \frac{F}{l^2} = \frac{m}{l^3}\sum_{i=1}^{N_0} V^2_{x_i} = \frac{m}{l^3}N_0\overline{V^2_x} = \frac{m}{V}\cdot N_0\overline{V^2_x}$

Si osserva poi che se il moto è casuale, cioè non esiste una direzione privilegiata, risulta: $\overline{V^2_x} = \overline{V^2_y} = \overline{V^2_z}$, e per la relazione tra modulo della velocità e suoi componenti: $\overline{V^2} = \overline{V^2_x} + \overline{V^2_y} + \overline{V^2_z} = 3\overline{V^2_x} \Rightarrow \overline{V^2_x} = \frac{1}{3}\overline{V^2}$. Sostituendo nell'equazione della pressione $P = \frac{mN_0}{3V}\overline{V^2}$

Ad ogni molecola di massa m che si muove con velocità uguale alla velocità quadratica media delle molecole, si può associare la grandezza $\overline{E_c} = \frac{1}{2}m\overline{V^2}$, detta energia cinetica

Da cui $\overline{V^2} = \frac{2\overline{E_c}}{m} \Rightarrow P = \frac{N_0}{V}\frac{2}{3}\overline{E_c}$ confrontando con la legge $P = R\frac{T}{V}$ si ha

$\frac{N_0}{V}\cdot\frac{2}{3}\overline{E_c} = R\frac{T}{V} \Rightarrow \overline{E_c} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_0}T = \frac{3}{2}KT$

$\Rightarrow K$ = costante di Boltzmann

La differenza fra caratteristiche del modello cinetico e quelle del caos sono dovute al fatto che le molecole di un gas si muovono in modo casuale ed imprevedibile, quindi non riproducibile. Il comportamento caotico, invece, presenta la stessa evoluzione temporale se si parte dalle stesse condizioni iniziali. Poiché praticamente è impossibile riprodurre le stesse condizioni iniziali con infinita precisione e il comportamento caotico è molto sensibile alle piccole variazioni delle condizioni iniziali a cui corrispondono grossi effetti, il comportamento caotico sembra casuale nonostante sia deterministico.

3) MAXWELL E SHANNON

Nel 1872 Boltzmann effettuò uno studio incentrato sull'evoluzione di un gas perfetto verso lo stato di equilibrio. Infatti, in qualsiasi momento in un gas c'è una distribuzione delle velocità: alcune molecole si muovono più velocemente, altre più lentamente rispetto alla media. Tale distribuzione varia in conseguenza delle collisioni tra di esse che evidentemente sono dotate di una certa velocità (energia cinetica). Boltzmann provò che tale distribuzione delle molecole tende a stabilizzarsi nel tempo e lo stato di equilibrio, una volta raggiunto, non viene modificato dagli urti. In quest'ottica elemento fondamentale diventano le configurazioni microscopiche in cui può trovarsi il gas. Si può pensare che lo spazio delle molecole sia suddiviso in celle elementari uguali e di volume finito. Un possibile microstato è quello che riconosce quali particelle sono in determinate celle, mentre un macrostato consiste nel sapere quante se ne trovano nelle celle. Quindi diverse configurazioni microscopiche sono compatibili con lo stesso stato macroscopico. Il microstato cambia quando, a causa delle collisioni, le molecole si spostano da una cella all'altra. Il numero di microstati possibili per un dato macrostato varia da un macrostato ad un altro e quanto più sono numerosi tanto più questo sarà probabile. L'evoluzione termodinamica di un sistema consiste nel passaggio da uno stato meno probabile fino a raggiungere lo stato più probabile (stato di equilibrio) attraverso stati intermedi. Boltzmann ebbe la geniale intuizione di far corrispondere l'equilibrio macroscopico alla distribuzione energetica realizzata dal massimo numero di configurazioni microscopiche. Introdusse una funzione di stato chiamata entropia, che cresce fino a raggiungere il suo massimo valore man mano che il sistema evolve verso il suo stato di equilibrio e quindi verso lo stato più probabil[e]. È evidente quindi l'esistenza di un legame tra la funzione entropia e la probabilità $S = Kf(P)$. La funzione che rappresenta meglio la proporzionalità tra entropia e probabilità è il logaritmo da cui: $S = K\log P$. È interessante calcolare la variazione di entropia per N_0 molecole contenute in un recipiente che viene aperto permettendo al gas di espandersi in volume che sia il doppio di quello iniziale: $V_f = 2V_i$. I valori di entropia sono:

$$\begin{cases} S_i = K\log P_i \\ S_f = K\log P_f \end{cases} \Rightarrow S_f - S_i = K(\log P_f - \log P_i) \Rightarrow \Delta S = K\log\frac{P_f}{P_i}$$

$$\begin{cases} P_f = 1 \text{ (probab. di trovare una molecola in } V_f) \\ P_i = \frac{1}{2^{N_0}} \text{ (probab. di trovare una molecola in } \frac{1}{2}V_f) \end{cases} \Rightarrow \frac{P_f}{P_i} = 2^{N_0} = \left(\frac{2V_i}{V_i}\right)^{N_0} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{N_0} \text{ Quindi}$$

$$\Delta S = K\log\frac{P_f}{P_i} = K\log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{N_0} = \underbrace{N_0 K}_{R}\log\frac{V_f}{V_i}$$ Da R si ricava la costante di Boltzmann $K = \frac{R}{N_0}$

Si nota dalla legge del gas ideale $P = R\frac{T}{V}$ che se $V_f = 2V_i \Rightarrow P_f = \frac{1}{2}P_i$ e $T_f = T_i$

Nel 1948 Shannon dette l'avvio allo sviluppo della teoria dell'informazione con numerose e svariate applicazioni alla teoria della probabilità, alla linguistica, alla logica ed alla analisi astratta. Studiando la trasmissione delle informazioni si accorse che maggiore è l'"ignoranza" che si ha di un messaggio, maggiore sarà l'informazione ottenuta quando questo messaggio sarà ricevuto. Per cui indica[ndo] con $\log\left(\frac{1}{P_i}\right) = -\log P_i$ l'incertezza su di un singolo risultato, egli calcolò in termine di una funzione detta entropia informazionale, l'informazione convogliata verso un destinatario che non conosce il messaggio come l'incertezza media associata alla distribuzione di probabilità p_i:

$S_i = -K\sum_{i=1}^{N} P_i\log P_i$ con K costante di normalizzazione determinabile empiricamente e P_i probabilità del risultato i-esimo dell'evento casuale. In seguito Brillouin propose una tesi secondo la quale l'informazione deve essere considerata come un termine negativo nell'entropia di un sistema. L'informazione è neg-entropia $S_{TOT} = S_0 - S_i$. L'entropia di un sistema diminuisce di una quantità pari all'informazione che si ha sul suo stato. L'entropia misura la mancanza di informazione sullo stato del sistema, essa ci fornisce l'ammontare ottotale di incertezza sulla sua struttura microscopica. Confrontando le espressioni delle entropie di Boltzmann e quella informazionale si nota una similitudine formale, che risulta più evidente se si esprime la prima in termini di probabilità p_i che le particelle sono trovate nella cella i-esima. Infatti l'entropia diventa: $S_B = K\log P = K\log\left(\frac{N!}{\Pi N_i}\right)$ che per valori di n_i molto grandi (Stirling) può essere espressa come $S_B = -NK\sum P_i\log P_i$. La legge di Clausius esprime l'impossibilità dei processi naturali di procedere in senso inverso, come ad esempio è impossibile che un corpo trasmetta calore ad un corpo a temperatura maggiore. In definitiva è impossibile ottenere una diminuzione spontanea di entropia. Maxwell nella teoria del calore espresse che un agente esterno, un demone per esempio, può far evolvere un sistema da uno stato più probabile, ad uno meno probabile, senza compiere lavoro. Supponendo, ad esempio, di avere un gas in un recipiente che sia stato diviso a metà da un setto in cui vi è una porta-trappola, il demone potrebbe decidere di aprire la porta solo quando le molecole più veloci vanno dalla parte A verso la parte B ottenendo $T_B > T_A$ senza lavoro esterno o comunque trascurabile; quindi si è avuta una diminuzione spontanea di entropia in violazione al secondo principio termodinamico. La chiave risolutiva del paradosso di Maxwell sta nell'osservare che il demone non interviene in modo casuale, bensì dopo aver acquisito informazioni sul sistema. Quindi il demone non ha violato la 2ª legge della termodinamica perché per far diminuire l'entropia termodinamica ha dovuto aumentare quella informazionale.

7) SISTEMI COMPLESSI

Proposto indipendentemente nel 1924 dal demografo Lokta e dal matematico Volterra, il modello di L-V è composto da una coppia di equazioni differenziali che descrivono la dinamica della crescita delle prede e dei predatori. Si può ipotizzare che in assenza di predatori e in presenza di risorse illimitate, le prede crescerebbero in accordo con la legge di Malthus $\frac{dx}{dt} = Ax$ (con A tasso di crescita). Questo accade perchè le prede non competono intensamente tra loro nella ricerca del cibo, soprattutto se questo è abbondante. Inoltre, argomentava Volterra, il numero delle prede mangiate per unità di tempo è proporzionale sia al numero di prede, sia al numero dei predatori, perciò nella legge di Malthus interviene il termine $-cxy$ (con c costante positivo), quindi $\frac{dx}{dt} = Ax - Cxy$. Analogamente, Volterra osservava che i predatori, con un naturale tasso di decrescita B, la cui estinzione è rappresentata dalla legge $\frac{dy}{dt} = -By$, aumentano nutrendosi delle prede perciò si incrementano in maniera proporzionale sia al numero delle prede che al oro numero perciò si ha $\frac{dy}{dt} = -By + Dxy$ (con D costante positiva). In sintesi l'interazione tra prede n presenza di risorse illimitate e predatori è governata dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Cxy \\ \frac{dy}{dt} = -By + Dxy \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \text{tasso di crescita delle prede} \\ B = \text{tasso di estinzione dei predatori} \\ C = \text{coeff. di interaz. che limita le prede} \\ D = \text{coeff. di interaz. che accresce i predatori} \end{cases}$$

n parametro d'ordine si intendono i parametri più significativi nella rappresentazione di un sistema complesso e meno fluttuanti nel tempo. Per analizzare questo sistema sono stati scelti due parametri d'ordine: x e y (numero delle prede e dei predatori). Nel nostro caso abbiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.35x - 0.6xy \\ \frac{dy}{dt} = -0.4y + 0.5xy \end{cases}$$

I punti di equilibrio di questo sistema sono ricavabili annullando le derivate rispetto al tempo, cioè:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.35x - 0.6xy = 0 \Rightarrow \\ \frac{dy}{dt} = -0.4 + 0.5xy = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} (x,y)_1 = (0,0) \\ (x,y)_2 = (0.8, 0.6)\ (B/D, A/C) \end{cases}$$

l primo punto di equilibrio è detto instabile, infatti il punto, rappresentativo dello stato del sistema nello spazio delle fasi, può passando nelle vicinanze del punto di coordinate (0,0), endere ed allontanarsene. È detto anche punto di equilibrio iperbolico perchè le forme delle traiettorie nelle vicinanze del punto di equilibrio può essere approssimato con un paio di iperbole. Il secondo punto di equilibrio è detto STABILE, perchè con il passare del tempo le traiettorie descritte dal punto rappresentativo del sistema nello spazio delle fasi resta ad una distanza praticamente costante dalle coordinate (0.8, 0.6).

Per la soluzione delle equazioni di L-V si utilizza il metodo di Heun, che è un metodo di integrazione numerica. Viene effettuato un cambio di variabili ed una ridefinizione dei parametri per cui si possa risolvere il sistema di equazioni

$$\left.\begin{matrix} a = \frac{A}{B} = 0{,}9 & X = \frac{D}{B} & x = \\ T = Bt & Y = \frac{C}{B} & y = \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 1.25x \\ 1{,}7y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX - XY = f(x,y) \\ \frac{dY}{dt} = -Y + XY = g(x,y) \end{cases}$$

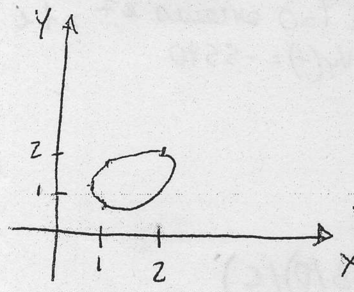
Si calcolano le successioni di X e Y nel seguente modo

$$x_i = x_{i-1} + 0.5 \cdot h\,(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1}+h, y_{i-1}+h))$$
$$y_i = y_{i-1} + 0.5 \cdot h\,(g(x_{i-1}, y_{i-1}) + g(x_{i-1}+h, y_{i+1}+h))$$

dove $x+h = x + h \cdot f(x,y)$, $y+h = y + h \cdot g(x,y)$ sono ottenuti dal rapporto incrementale $f(x,y) = \frac{(x+h)-x}{h}$ con h = passo preso apposta piccolo

X	Y	f(x,y)	g(x,y)	x+h	y+h	f(x+h, y+h)	g(x+h, y+h)
2	2	-2.2	2	0.24	3.6	0.17	-2.736
.19	1.7	-0.952	0.323	0.428	1.958	-0.455	-1.12
.63	1.38	-0.3	-0.51	0.39	0.97	-0.03	-0.59
0.5							

Il numero di prede e predatori che si calcola ad ogni fase oltre a dipendere dalle condizioni iniziali, dipende fortemente dal numero di prede e predatori presenti nella fase immediatamente precedente. Nel nostro caso, prendendo come punto iniziale le coordinate $(1.6, 1.2)$ e $h = 0.8$ si ha



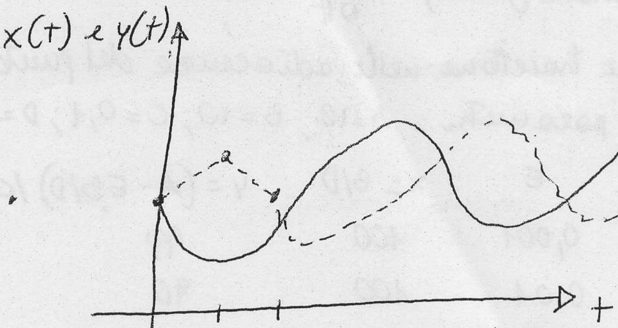
Si nota che l'evoluzione dei parametri d'ordine ha un senso antiorario dovuto alla natura delle equazioni differenziali, ~~precisamente~~
Se si considera un piano cartesiano con origine nel punto di equilibrio stabile $(1, 1.02)$ si avrà che nel primo quadrante le derivate sono $\frac{dy}{dt}$ crescente e $\frac{dx}{dt}$ decrescente, nel secondo sono entrambe decrescenti, nel terzo $\frac{dx}{dt}$ crescente e $\frac{dy}{dt}$ decresc., e nel quarto sono entrambe crescenti.

Si calcolano i punti che descrivono l'evoluzione di prede e predatori nel tempo secondo:

$x(t) = x(t-1) + f(x(t-1), y(t-1))\, dt$

$y(t) = y(t-1) + g(x(t-1), y(t-1))\, dt$, con $dt = 0.5$

t	x(t)	y(t)	f(x,y)	g(x,y)
1	2	2	-2.2	2
2	0.9	3	-1.89	-0.3
3	-0.05	2.85	0.1	-3
4	0	1.35	0	
5				



Si nota ovviamente che i massimi e i minimi dei predatori sono ritardati rispetto a quelli delle prede.

4) METEORITE Descrivere parametricam. la caduta libera di un meteorite con grafico nel caso che l'atmosfera sia alta 50 km; dopo 10 s la massa si riduce a circa il 37% del valore iniz.; la velocità iniz. lungo il verticale sia 2000 m/s; stimare la velocità a Terra e la sua massa residua.

Quando un meteorite, cadendo sulla Terra, incontra l'atmosfera terrestre a circa 60 km di altitudine subisce una resist. aerodinamica che risulta trascurabile, nel senso che non influenza la legge del moto perché la velocità limite verrebbe raggiunta in un tempo circa 1000 volte superiore al tempo necessario per toccare Terra. Ciononostante il meteorite non è in caduta libera, perché l'attrito con l'aria lo riscalda tanto da consumarlo, provocando una sorta di "evaporazione". Questa evap. non dipenderà direttamente dalla sua massa, ma dalla superficie esposta all'aria. Quindi mentre nel caso della resistenza aerodinamica consideriamo rilevante la sezione del corpo, in questo caso consideremo ~~rilevante la sezione del corpo~~ tutta la superficie anteriore del corpo in caduta.

Approssimiamo la superficie del meteorite come una sfera $S = 4\pi r^2$, con $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; e $m = \left(\frac{4}{3}\right)\pi \rho r^3 = \rho V$. Supponiamo che la sua evaporazione sia proporzionale alla superficie della sfera S (funzione del tempo): $dS = -KS\,dt$, dove il parametro K è un valore che poniamo come limite d'errore (K è la ns ignoranza). Risolvendo l'equazione differenziale per $m(t)$ avremo che $m/m_0 = e^{-\frac{3}{2}Kt}$. Abbiamo che $m_0 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$. Allora ponendo $\tau = 2/3K$ la soluz. dell'equazione differenziale è $m(t) = m_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, dove τ corrisponde alla vita media di un meteorite, cioè al tempo necessario perché la massa si riduca al 36,8% del valore iniziale. Infatti se consideriamo un tempo $t = \tau$ la massa risulta pari a $1/e$ (nel ns caso $\tau = 1$ s). Trascureremo la resist. aerodin. dell'aria poiché l'effetto corrispondente dell'attrito è quello di produrre la variaz. di massa. La risultante delle ~~due~~ forze esterne agenti lungo le due componenti sarà quindi data solo dalla forza peso. Applicando la legge di Newton $F = (d/dt)(mv)$ {F e v vettori}; esplicitata lungo le due componenti x e y, avremo due funzioni: F_x e F_y. Ricordiamo anche che la legge della caduta se m non è costante è: $-g m_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -(m_0/\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} [V_y] + m_0 e^{-\frac{t}{\tau}} * (dV_y/dt)$ (orientando l'asse y verso l'alto). La soluzione dell'equazione differenziale è data dalla somma della soluzione dell'omogenea associata $V_Y = C^* e^{\frac{t}{\tau}}$ e della soluzione particolare $V_Y = \tau g$ cioè $V_y = \text{cost} * e^{\frac{t}{\tau}} + \tau g$. Nel caso in esame, cioè $\tau = 10$ s e $V_Y = 2000$ m/s $V_Y(t) = -[(V(0))_Y + \tau g] e^{\frac{t}{\tau}} + \tau g$ quindi $V_Y(t) = -((2000+100) e^{\frac{t}{10}}) + 100 = 100 - 2100 e^{\frac{t}{10}}$. Per disegnare il grafico calcoliamo alcuni punti per gli intervalli $t = 0, 5, 10, 15, 20$. Per $t=0$ avremo $e^{\frac{t}{\tau}} = 1$ e $V_Y(t) = -2000$. Per $t=5$ avremo $e^{\frac{t}{\tau}} = 1$ e $V_Y(t) = -3470$. $t=10$ $e^{\frac{t}{\tau}} = 1,7$ $V_Y(t) = -5570$ $t=15$ $e^{\frac{t}{\tau}} = 4,5$ $V_Y(t) = -9350$, $t=20$ $e^{\frac{t}{\tau}} = 7,4$ e $V_Y(t) = -15440$

4) RISORSE LIMITATE

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax - Cxy - Ex^2 = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -By + Dxy = 0 \end{cases}$$

punti di equilibrio: $P_1 = (x,y) = (0,0)$
$P_2 = (x,y) = (B/D, (A - EB/D)/C)$
$P_3 = (x,y) = (A/E, 0)$

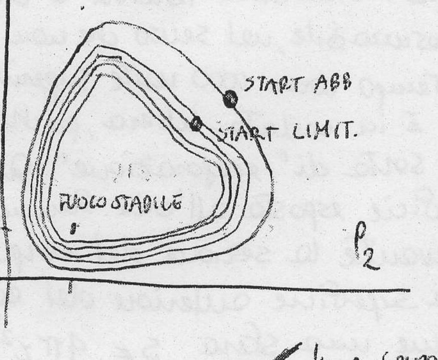
Equazioni ridotte (Hemm): $\dfrac{dx}{dt} = eX - XY - Ex^2$ $\quad \dfrac{dy}{dt} = -Y + XY$

Studiamo le traiettorie nelle adiacenze del punto di equilibrio P_2 con i seguenti valori fissati per i parametri: $A=10$; $B=10$; $C=0,1$; $D=0,1$ in 3 diversi casi corrispond. a 3 diverse E

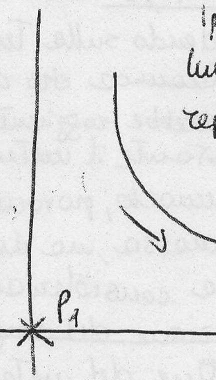
RISORSE	E	$x = B/D$	$Y = (A - EB/D)/C$
Molto abbond.	0,001	100	99
limitate	0,01	100	90
Molto scarse	0,05	200	-20 (privo di significato)

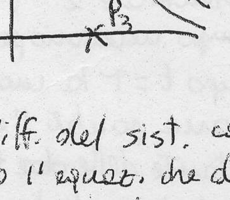
Nel caso di un sistema descritto da due parametri d'ordine, quando le risorse non sono illimitate ($E>0$), si ha una traiettoria a spirale logaritmica, per cui il punto si avvicina al centro molto lentamente, in un tempo abbastanza grande ma praticam. finito (anche se matematic. infinito), dato che si tratta di sistemi naturali e discreti.

$$E = \begin{cases} 0,001 \\ 0,01 \end{cases}$$



Iperbolico, attrattivo lungo Y (predatori) e repulsivo verso X





Iperbolico, repulsivo lungo y e attrattivo verso x

$\lim_{E \to 0} P_3 = \infty$

La presenza di ris. limit. le popol. non può aument. indef., quindi bisogna modif. qles nell'equaz. $\frac{dx}{dt} = A \cdot x(t)$. Notiamo che se le risorse sono lim. il tasso di cresc. A non sarà + una cost., bensì dimin. con l'aum. della popol. x. Dunque A non è cost., ma il probl. sussiste sulla forma da dare alla funz. A(x). Notiamo che A(x) deve diminuire al cresc. di x, ma deve allo stesso tempo essere cost. x piccoli valori di x. La + sempl. forma che poss. scegliere è: $A(x) = A - Ex$. A diff. del sist. compl. con ris. illim., il param. $E>0$ e tiene conto della lim. dispon. di ris. In tal caso l'equaz. che descr. la dinam. di una popol. diventa $\frac{dx}{dt} = A(x) \cdot x(t) = (A - Ex) \cdot x(t) = Ax(t) - E(x(t))^2$. Notiamo che da un punto di vista meccanico se x rappres. una veloc, il secondo membro sarebbe la forza agente (causa variaz. veloc) divisa x la massa (inerzia sist.). I punti di equil. x l'equaz. $\frac{dx}{dt} = Ax(t) - E(x(t))^2$ sono i valori di $x(t)$ che annullano il 2° membro dell'eq. diff. si determ. risolv. l'eq. diff. $Ax(t) - E(x(t))^2 = x(t) \cdot [A - Ex(t)] = 0$