Equazioni alle differenze

a_i, b_i noti $i = 0, \dots, M$

$\begin{cases} x(n) \text{ successione nota} \\ x(-M) \dots x(-2)\ x(-1), x(0), \dots \end{cases}$

$$(1): \quad y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) \quad , \forall n \geq 0$$

si dice equazione alle differenze di ordine M

Es.

1. $y(n) + y(n-1) = 1$; (eq. alle diff. del 1° ordine)
2. $y(n) - y(n-1) + 3y(n-2) = n$; (eq. alle diff. del 2° ordine)
3. $y(n) - y(n-2) = 0$; (eq. alle diff. del 2° ordine omog.)

Assegnate $y(-1), y(-2), \dots, y(-M)$ M condizioni iniziali

la (1) da un'unica soluzione $y(n)$ per $n \geq 0$.

Eq. omogenea

$$(2) \qquad y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i y(n-i) \qquad \left(\sum_{i=0} b_i x(n-i) \equiv 0 \right.$$

le soluzioni dell'omogenea

$$y(n) = z_1^n \Rightarrow z_1^n = -\sum_{i=1}^{M} a_i z_1^{n-i} \iff$$

$$z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + a_2 z_1^{n-2} + \dots + a_M = 0$$

allora se z_1 è radice del polinomio (caratteristico)

$$p(z) = z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_M$$

allora $y(n) = z_1^n$ è soluzione dell'omogenea

Siano $z_1, z_2, \dots, z_M$ le M radici di $p(z)$ che supponiamo distinte. Allora

$$y_1(n)=z_1^n, \quad y_2(n)=z_2^n, \quad \dots, \quad y_M(n)=z_M^n$$

sono soluzioni di (2) ed essendo $z_1 \dots z_M$ distinti, sono pure linearmente indipendenti.

L'insieme delle soluzioni di (2) sarà dato delle loro combinazione lineari:

$$y(n) = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_M z_M^n$$

con $c_1, c_2, \dots, c_M$ costanti arbitrarie, che per essere determinate univocamente richiede l'imposizione di M condizioni iniziali.

__Esempio 1.__ $\begin{cases} y(n) = a\,y(n-1) \\ y(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow y(n) = a\,y(n-1) = a^n y(-1) = a^n$

__Esempio 2.__ (e. diff. 2° ordine)

$$(3) \quad \begin{cases} y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0, & \forall n \geq 0 \\ y(-1) = 1, \; y(-2) = 0, \end{cases}$$

$p(z) = z^2 - 3z + 1$ polinomio caratteristico

$p(z) = (z-1)(z-2)$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ radici

$$y(n) = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n = c_1 1^n + c_2 2^n = c_1 + c_2 2^n$$ insieme delle soluzioni

Per determinare le due costanti usiamo le due condizioni iniziali per $n=-1 \Rightarrow y(-1)=1 \wedge y(-1)=c_1+c_2 2^{-1}$

$n=-2 \Rightarrow y(-2)=0 \wedge y(-2)=c_1+c_2 2^{-2}$

$$\begin{cases} c_1+\frac{c_2}{2}=1 \\ c_1+\frac{c_2}{4}=0 \end{cases} \qquad \underline{c_1=-1 \wedge c_2=4}$$

$y(n)=-1+4\cdot 2^{n}$ è la soluzione di (3).
$=-1+2^{n+2}$

Caso di radici coincidenti

Se z_1 è radice doppia $(z_1=z_2)$

$$p(z_1)=0 \wedge p'(z_1)=0$$

allora

$$z_1^n \quad e \quad n z_1^n$$

sono soluzioni dell'omogenea.

L'insieme delle soluzioni è dato da:

$$y(n)=c_1 z_1^n+c_2 n z_1^n+c_3 z_3^n+\ldots+c_M z_M^n.$$

Più in generale se z_1 è radice di molteplicità s ~~molteplicatore~~ $\left(p(z_1)=p'(z_1)=\ldots=p^{(s-1)}(z_1)=0 \wedge p^{(s)}(z_1)\neq 0\right)$
allora:

$$z_1^n,\ n z_1^n,\ \ldots,\ n^{s-1} z_1^n$$

sono tutte soluzioni linearmente ~~e~~ indipendenti dell'omogenea:

$$y(n)=\underbrace{c_1 z_1^n+c_2 n z_1^n+\ldots+c_s n^{s-1} z_1^n}+\underbrace{c_{s+1} z_{s+1}^n+\ldots+c_M z_M^n}$$

Caso di radici coincidenti.

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 0$$

$$p(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$$

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

$$y(-1) = 1 \qquad y(-2) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}(-1) = 1 & \Rightarrow c_1 - c_2 = 2 \Rightarrow 2c_2 - c_2 = 2 \\ & \quad c_2 = 2 \\ \dfrac{c_1}{4} + \dfrac{c_2}{4}(-2) = 0 & \Rightarrow c_1 = 2c_2 \Rightarrow c_1 = 4 \end{cases}$$

$$y(n) = 2^{n+1} + n 2^{n+2}$$

verifica

$$2^{n+1} + n 2^{n+2} - 4\left(2^n + (n-1) 2^{n+1}\right) + 4\left(2^{n-1} + (n-2) 2^n\right) =$$

$$2^{n-1}\left[\cancel{2^2} + n 2^3 - 4\left(\cancel{2} + (n-1) 2^2\right) + 4\left(\cancel{1} + (n-2) 2\right)\right] =$$

$$\cancel{n 2^3} + 4 \cdot \cancel{2^2 n}$$

Equazione completa:

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i\, y(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i\, x(n-i) \qquad n \geq 0$$

Siano $y(n)$ e $\bar{y}(n)$ due soluzioni della completa

$w(n) = y(n) - \bar{y}(n)$ è soluzione dell'omogenea

Infatti:

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i\, y(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i\, x(n-i)$$

$$\bar{y}(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i\, \bar{y}(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i\, x(n-i)$$

Sottraendo:

$$w(n) = y(n) - \bar{y}(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i \left[y(n-i) - \bar{y}(n-i) \right] = -\sum_{i=1}^{M} a_i\, w(n-i)$$

Quindi:

$$y(n) = \underbrace{w(n)}_{\text{sol. omogenea}} + \underbrace{\bar{y}(n)}_{\text{sol. particolare della completa}}$$

~~L'insieme~~ Ogni soluzione della completa si può scrivere come ~~soluzione della~~ somma di una soluzione dell'omogenea più una soluzione particolare della completa.

Esempi di calcolo di soluzioni particolari

$$\begin{cases} y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 7 \quad , n \geq 0 \\ y(-1) = 1 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

termine noto costante

$$\bar{y} = y(n) \Rightarrow \bar{y} - 5\bar{y} + 6\bar{y} = 7 \Rightarrow \bar{y} = \frac{7}{1-5+6} = \frac{7}{2} = \frac{7}{p(1)}$$

Funziona quando $p(1) \neq 0$

In generale:

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) = g \qquad (g = \text{costante } !!!)$$

Con $p(z) = z^N + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{N-i}$, $p(1) \neq 0$

$$\bar{y}(n) = \bar{y} = \frac{g}{p(1)} \quad \text{è soluzione particolare}$$

$$y(n) = w(n) + \frac{7}{2};$$

$$w(n) = c_1 2^n + c_2 3^n;$$

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{7}{2};$$

$$\begin{cases} c_1 2^{-1} + c_2 3^{-1} + \frac{7}{2} = 1 \\ c_1 2^{-2} + c_2 3^{-2} + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} = -6 \\ \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{9} = -7 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c_1 = -60 \\ c_2 = -72 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & \frac{1}{3} \\ -7 & \frac{1}{9} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{6}{9} + \frac{7}{3}}{\frac{1}{18} - \frac{1}{12}} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{7}{3}}{\frac{-3+2}{36}} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{36}} = -36 \cdot \frac{5}{3} = -6$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -6 \\ \frac{1}{4} & -7 \end{vmatrix}}{-\frac{1}{36}} = \frac{-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}}{-\frac{1}{36}} = -36 \cdot 2 = \underline{\underline{-72}}$$

Esempio: Sol. particolare

$$y(n) + 3y(n-1) = n^2 + n \qquad (*)$$

si cerca sol. particolare nella forma:

$$\bar{y}(n) = An^2 + Bn + C$$

A, B, C costanti da determinare

Se $\bar{y}(n)$ è soluzione di $(*)$ allora dovrà essere:

$$(An^2 + Bn + C) + 3[A(n-1)^2 + B(n-1) + C] = n^2 + n$$

$$(A + 3A)n^2 + (B - 6A + 3B)n + C + 3C + 3A - 3B = n^2 + n$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = 1/4$$

$$4B - 6A = 1 \Rightarrow 4B = \frac{6}{4} + 1 \Rightarrow B = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$4C + 3A - 3B = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}(3B - 3A) = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{8} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{15-6}{8} = \frac{9}{32}$$

① $\bar{y}(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{5}{8}n + \frac{9}{32}$

Soluzione dell'omogenea:

$$w(n) + 3w(n-1) = 0$$

$$p(z) = z + 3, \quad z_1 = -3$$

$$w(n) = c(-3)^n$$

Soluzione della completa:

$$y(n) = w(n) + \bar{y}(n) = c(-3)^n + \left[\frac{1}{4}n^2 + \frac{5}{8}n + \frac{9}{32}\right]$$

Imponendo una condizione iniziale $y(-1) = 0$

si ottiene la costante $c = -\frac{9}{32}$!!!