es. 14

Considerate le seguenti due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

rispondere alle seguenti domande:

1) A e B hanno lo stesso spazio colonna? $\left(R(A) = R(B) \right)$
2) A e B hanno lo stesso spazio nullo? $\left(N(A) = N(B) \right)$

1) bisogna verificare che $R(A) = R(B)$

$\Downarrow$

è necessario calcolare $R(A)$ e $R(B)$

$\Downarrow$

$R(A) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } Ax = y \} =$
$=$ spazio generato dalle colonne l.i. di A

$\Downarrow$

decompongo A e B con GAUSS per verificare le colonne l.i., cioè quelle contenenti gli elementi pivotali

$\Downarrow$

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow R_2 = R_2 - 2R_1 \\ \Rightarrow R_3 = R_3 - R_1 \end{matrix}$$

→ elementi pivotali 1 e −2 ⇒ colonne l.i. = 1ª e 2ª

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 = R_3 + \frac{1}{2} R_2$$

→ chiamo questa matrice E_A

$R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ⇓

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow R_2 = R_2 - 4R_1 \\ \\ \Rightarrow R_3 = R_3 \end{matrix}$$

(⇒ lascio così perché il primo elemento è già azzerato)

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{chiamo questa matrice } E_B \\ \\ \Rightarrow R_3 = R_3 + \frac{1}{2} R_2 \end{matrix}$$

⇓

$$R(B) = \text{span}\left\{ B_{*1}, B_{*2} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ semplifica

⇓

osservazione:
posso dedurre che

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2 = \text{n.ro colonne l.i.}$$

⇓

dopo aver calcolato R(A) e R(B) verifico che

$R(A) = R(B) \Leftrightarrow$ lo spazio generato dalle colonne di B è uguale allo spazio generato dalle colonne di A.

$\Leftrightarrow$ le colonne di B sono combinazione lineare delle colonne di A

$$\Leftrightarrow B_{*1} = \alpha A_{*1} + \beta A_{*2} \quad \Leftrightarrow$$

$$B_{*2} = \alpha_1 A_{*2} + \beta_1 A_{*2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \; 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \; 2)$$

$$\Leftrightarrow 1) \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}$$

$$2) \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

⇓

LE COLONNE DI B SONO COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI A.

$$\Downarrow$$

calcolo ora $N(A)$ e $N(B)$ per verificare che

materie $N(A) = N(B)$ lezioni e compiti per il giorno

$$\Downarrow$$

$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0 \}$ => tutte le soluzioni del sistema omogeneo

$$\Downarrow$$

Sfrutto le matrici ridotte con Gauss che sono equivalenti a quelle di partenza: hanno le stesse soluzioni.

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid E_A x = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & +5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$ (semplifico la seconda riga)

materie lezioni e compiti per il giorno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & +5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 5x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

comunicazioni:

$$N(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$ GRAFICAMENTE: RETTA PASSANTE PER LO 0 E QUESTO PUNTO IN $\mathbb{R}^3$

$$N(B) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid E_B x = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \text{(semplifico la II riga)}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4x_2 - 4x_3 \\ x_2 = +\frac{5}{4} x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4 \cdot \left(+\frac{5}{4} x_3 \right) - 4x_3 = [\text{illegible}]\, x_3 \\ x_2 = -\frac{5}{4} x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_3 \\ +\frac{5}{4} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ +\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

$$N(B) = \operatorname{span} \left\{ \overset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ +\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

→ GRAFICAMENTE = RETTA in $\mathbb{R}^3$ PASSANTE PER LO 0 E QUESTO PUNTO

$N(A) = N(B) \iff$ generano lo stesso spazio vettoriale $\iff N(B) = \alpha \cdot N(A)$ cioè $N(B)$ è combinazione

lineare di $N(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A) \neq N(B)$$

es. 15

verificare che $v = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A)$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$$v \in N(A) \iff Av = 0$$

$$\underbrace{\underset{3\times5}{A} \cdot \underset{5\times1}{v}}_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8+2+6 \\ -16+4+9+3 \\ -24+6+3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v \in N(A)$$

es. 16

determinare quale dei seguenti insiemi è formato da vettori l.i :

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

def. sia $S = \{v_1 - v_n\}$ un insieme di vettori $\in \mathbb{R}^n$,

v_i sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ se e solo se $\alpha_i = 0$

$\Downarrow$

dati v_1, v_2 e v_3 sono l.i $\Leftrightarrow$

$\exists\ \alpha, \beta, \gamma$ t.c.

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ se e solo se $\alpha, \beta, \gamma = 0$

$\Downarrow$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

se $\det(A) = 0$ $\Rightarrow$ rank$(A) = 3 = $ max $\Rightarrow$ le colonne sono l.i

$$\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\2&1\\3&0\end{matrix}$$

$= 2\cdot5\cdot3 - 3 = 27 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti

b) $v_1=(1\ 2\ 3)$ $v_2=(0\ 4\ 5)$ $\rightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$

$v_3=(0\ 0\ 6)$ $v_4=(1\ 1\ 1)$

$\Downarrow$

per calcolare il rank posso fare la trasposta, cambiando i vettori riga, cioè lavoro con vettori colonna

$\Downarrow$

poiché siamo in $\mathbb{R}^3$ il rank max $=3 \Rightarrow$ i 4 vettori,

sicuramente non sono linearmente indipendenti, ma c'è uno che è combinazione lineare degli altri (es. v_4)

c) $v_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\2&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ NB: per sapere se dei vettori sono l.i. avrei potuto anche calcolare il rank decomponendo la matrice con GAUSS

$$\begin{vmatrix}3&1&2\\2&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&1\\2&0\\1&0\end{matrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{i vettori sono l.i.}$$

$\Updownarrow$

$\mathrm{rank}(A)=3$

es. 17

Verificare che:

$$\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A) = \text{rank}(AA^T)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcolo A^TA e AA^T:

$$\underbrace{\underset{4\cdot 3}{A^T}\,\underset{3\cdot 4}{A}}_{4\cdot 4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+4 & 3+3+12 & 1-1+4 & -4-16 \\ 3+3+12 & 9+9+36 & 3-3+12 & -12-48 \\ 1-1+4 & 3-3+12 & 1+1+4 & -4-16 \\ -4-16 & -12-48 & -4-16 & +16+64 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 18 & 54 & 12 & -60 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \\ -20 & -60 & -20 & 80 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ si osserva che A^TA è simmetrica, infatti:

$A^TA = (A^TA)^T$

$$AA^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}}_{3\times4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_{4\times3} =$$

3×3

$$= \begin{pmatrix} 1+9+1+16 & -1-9+1 & 2+18+2+32 \\ -1-9+1 & 1+9+1 & -2-18+2 \\ 2+18+2+32 & -2-18+2 & 4+36+4+64 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -9 & 54 \\ -9 & 11 & -18 \\ 54 & -18 & 108 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ si osserva che: AA^T è simmetrica infatti $AA^T = (AA^T)^T$

$\Downarrow$

devo calcolare il rank(A), rank(A^TA), rank(AA^T)

$\Downarrow$

applico la riduzione di Gauss, il n.ro di colonne con elemento pivotale è il rank della matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Leftarrow R_2 = R_2 + R_1 \\ \Leftarrow R_3 = R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow R_3 = R_3 - \left(\frac{\cancel{-8}^{\,2}}{\cancel{-4}_{\,1}}\right) R_1$$

$\Downarrow$

$\text{rank}(A) = 2$

$\Downarrow$

applico Gauss per verificare che anche
$\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(AA^T) = 2$

$$A^TA \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -10 \\ 3 & 9 & 2 & -10 \\ 2 & 6 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ osservazione: chiaramente $\text{rank}(A^TA) \leq 3$ perché 1ª riga e 2ª riga sono uguali $\Rightarrow$ non sono l.i.

$\Downarrow$

applico Gauss alle righe rimanenti ... posso eliminare anche la 2ª colonna!!!

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -10 \\ 0 & 6-\frac{2}{3}9 & 3-\frac{2}{3}\cdot 2 & -10+\frac{2}{3}10 \\ 0 & -3+\frac{1}{3}9 & -1+\frac{1}{3}2 & 4+\frac{1}{3}(-10) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow R_3 = R_3 - \frac{2}{3}R_1 \\ \Rightarrow R_4 = R_4 + \frac{1}{3}R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 5/3 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 12/15 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 = R_3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}R_1$$

$\Downarrow$

$\text{rank}(A^TA) = 2$ (ha 2 elem. pivotali)

$$AA^T\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -9 & 11 & -18\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^\wedge \text{riga} = 3^\wedge \text{riga} \\ 1^\wedge \text{colonna} = 2 * 3^\wedge \text{colonna}\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(AA^T) \leq 2$$

considero una sottomatrice 2x2 e calcolo il determinante:

$$\det\begin{pmatrix}11 & -18\\ -1 & 6\end{pmatrix} = 11 \cdot 6 - 18 = 66 - 18 = 48 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(A^TA) = 2$$

$$\Downarrow$$

si è verificato che:

def. data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

le matrici prodotto

A^TA e AA^T sono SIMMETRICHE

(cioè $(AA^T) = (AA^T)^T$
$(A^TA) = (A^TA)^T$)

e godono della proprietà:

$$\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A) = \text{rank}(AA^T)$$

$$\Downarrow$$

verificare che:

$R(A^TA) = R(A^T)$ e $R(AA^T) = R(A)$

$N(A^TA) = N(A)$ e $N(AA^T) = N(A^T)$

$\Downarrow$

si può verificare che:

$$R(AA^T) = R(A)$$

cioè lo spazio colonna generato dalla matrice AA^T coincide con quello generato da A.

$\Downarrow$

accade se e solo se le colonne di AA^T sono combinazione lineare delle colonne di A

$$R(AA^T) = span\{AA^T_{*1}, AA^T_{*2}\} = span\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\11\\18\end{pmatrix}\right\}$$

$$R(A) = span\{A_{*1}, A_{*4}\} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$\Downarrow$

$$AA^T_{*1} = \alpha A_{*1} + \beta A_{*2}$$

$$AA^T_{*2} = \alpha_1 A_{*1} + \beta_1 A_{*2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-9\\11\\-18\end{pmatrix} = (-11)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$R(A^TA) = R(A^T)$$

cioè lo spazio colonne di A^TA coincide con lo spazio righe di A

$$R(A^TA) = span\{A_{*1}, A_{*3}\} = span\left\{\begin{pmatrix}6\\18\\4\\-20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\12\\6\\-20\end{pmatrix}\right\}$$

$$R(A^T) = span\{A_{1*}, A_{2*}\} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$R(A^TA) = \alpha A_{*1} + \beta A_{*3}$$

$$R(A^T) = \alpha_1 A_{1*} + \beta_1 A_{2*}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}6\\18\\4\\-20\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-4\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\12\\6\\-20\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-4\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$$

materie lezioni e compiti per il giorno

comunicazioni:

es. 18

determinare se il seguente insieme di matrici è l.i

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Downarrow$

def.
dato un insieme $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori, sono l.i se

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \iff \alpha_i = 0$$

$\Downarrow$

consideriamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ e una combinazione lineare delle 4 matrici con α_i:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

(risolvere l'equazione equivale a risolvere il sistema di equazioni)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ le matrici sono l.i. perché l'unica combinazione lineare nulla è quella ottenuta con gli $\alpha_i = 0$

es.19

Verificare quale delle seguenti coppie di vettori sono ortogonali

def. siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$
sono ORTOGONALI $\Leftrightarrow$ $v_1^T v_2 = 0$
(se il loro prodotto scalare è nullo)
(= la proiezione di un vettore sulla retta direzione dell'altro è nulla)

materie lezioni e compiti per il giorno

a) $\underset{n \times 1}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underset{n \times 1}{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\underset{1 \times n}{x^T} \underset{n \times 1}{y}}_{1 \times 1} = -2 - 6 + 8 = 0 \Rightarrow$ x e y sono ortogonali

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x^T y = \cancel{4} - \cancel{4} - 3 + 8 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ x e y non sono ortogonali

c) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow x^T y = 0 \Rightarrow$ x e y sono ortogonali

oss. se x è l'origine "0" degli assi cartesiani, allora y è ortogonale (proiezione = un punto)

es. 30 determinare se i seguenti tre vettori sono mutuamente ortogonali (cioè costituiscono un sistema di vettori ortogonali).

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

devo calcolare:

$$x^T y \quad x^T z \quad y^T z$$

e verificare se sono uguali a zero.

$$\left.\begin{aligned} x^T y &= 1 - 1 = 0 \\ y^T z &= -1 - 1 + 2 = 0 \\ x^T z &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

Sì! è un insieme di vettori mutuamente ortogonali

$$\Downarrow$$

osservazione:

i vettori ortogonali ($x^T y = 0$) sono linearmente indipendenti ($\sum \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$)

es. 21

considerare le seguenti matrici indica quale quella che lasciano invariata la lunghezza dei vettori

$\Leftrightarrow$ le matrici sono ortogonali cioè:

sia $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad Q^T Q = QQ^T = I$

$\Leftrightarrow$ conservano la norma 2:

$$\|Ax\|_2 = \|x\|_2$$

$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \Rightarrow \|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Ax)_i^2}$ (= norma di vettori) $= \sqrt{(Ax)^T (Ax)}$

dim. $\|Ax\|_2 = \sqrt{(Ax)^T (Ax)} =$ → trasposta del prodotto = prodotto dei trasposti scambiati di segno.

$$= \sqrt{x^T \underbrace{A^T A}_{I} x} =$$

$$= \sqrt{x^T x} =$$

$$= \|x\|_2$$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

applico la def. di matrici ortogonali e verifico se $A^T A = AA^T = I$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 17 \end{pmatrix} \neq I$$

$\Rightarrow A$ non è ortogonale

b) $v \in \mathbb{R}^n$

$P = I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot (v v^T) \Rightarrow$ vedi esercizio 7

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ è ortogonale perché è la matrice I con le colonne invertite

$I^T I = I I^T = I$

<u>Es.22</u>

siano $A_1 \dots A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$

e si consideri

$$A = \prod_{i=1}^{k} A_i \Rightarrow \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)$$

Spiegare perché:

se $\operatorname{rank}(A_i) = n$ (rank massimo) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ è non singolare.

<u>dim.</u>

A è non singolare $(\Leftrightarrow \exists A^{-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \det\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ poiché $\operatorname{rank}(A_i) = n$ = rank massimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_i$ non singolari $(\exists A_i^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A_i) \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots k$

$\det\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) \neq 0 \Rightarrow A$ è non singolare

es. 23

determinare l'angolo formato dai vettori

materie | lezioni e compiti per il giorno

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

def. l'angolo θ formato dai vettori u e v =

$$\cos\theta = \frac{\overbrace{u^T v}^{\text{scalare}}}{\|u\|_2 \|v\|_2} \quad \left(\begin{array}{l} \Rightarrow \text{prodotto scalare di } u \text{ e } v \\ \Rightarrow \text{le norme euclidee dei due vettori} \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\cos\theta = \frac{(2\ -1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} =$$

materie | lezioni e compiti per il giorno

$$= \frac{2-1+2}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60°$$

comunicazioni:

es. 24

Utilizzare il processo di Gram-Schmidt per calcolare i vettori ortonormali a partire dal seguente insieme di vettori:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

METODO DI GRAM-SCHMIDT

(= permette di calcolare a partire da un'insieme di vettori l.i, un'insieme di vettori ortonormali, cioè ortogonali e normalizzati)

siano $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ vettori l.i

(cioè $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i = 0 \iff \alpha_i = 0$

= l'unica combinazione lineare nulla è quella data con i coefficienti $\alpha_i = 0$)

si calcolano q_i ortogonali:

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \delta_{ij} \ (\delta \text{ di Kronecker})$$

e si normalizza $\|\cdot\|_2$ (= lunghezza = 1)

1° PASSO:

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2}$$

(= il primo vettore si normalizza solo)

2° PASSO

continuo

$\tilde{q}_2 = a_2$

2° PASSO:

continuo

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \alpha q_1$$

$\Rightarrow$ con $\alpha = q_1^T a_2$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|_2}$$

3° PASSO:

continuo

$$\tilde{q}_3 = a_3 - \beta_1 q_1 - \beta_2 q_2$$

$\Rightarrow$ con $\beta_2 = q_2^T a_3$

$\Rightarrow$ con $\beta_1 = q_1^T a_3$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|_2}$$

verifico prima che x_1, x_2, x_3 sono l.i. se

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \iff \alpha, \beta, \gamma = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = \max \Rightarrow$ le colonne di

A sono l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 2 + (-1) - \left(-6 + (-1)\right) = -6 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

i vettori x_1, x_2, x_3 sono l.i.

$$\Downarrow$$

applico il metodo di Gram-Schmidt per calcolare i vettori q_1, q_2 e q_3 ortonormali tra loro.

$$q_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \sqrt{1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = x_2 - (q_1^T x_2) \cdot q_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|_2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = x_3 - (q_1^T x_3) q_1 - (q_2^T x_3) q_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es. 25

dimostrare che la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

è ortogonale

$\Downarrow$

P è ortogonale $\Leftrightarrow P^T P = P P^T = I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P_{*i}^T \cdot P_{*j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \ (\delta \text{ di Kronecker})$$

cioè se le colonne di P sono ~~ortonormali~~ linearm. indip. (ortogonali)

$\Downarrow$

quindi: per provare l'ortogonalità di una matrice si può anche provare che le colonne sono $\perp$ due a due $\perp$ due ortogonali (e quindi l.i.)

$P \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$P_{*1}^T P_{*2} = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0\\ \cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} = 0$$

$$P_{*1}^T P_{*3} = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0\\ -\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = 0$$

$$P_{*2}^T P_{*3} = (0\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta)\begin{pmatrix}0\\ -\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

oppure posso dimostrarlo utilizzando la def. di matrici ortogonali

$$P^TP = PP^T = I$$

1) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\cos\theta)^2 & (\operatorname{sen}\theta^2)\\ 0 & \operatorname{sen}\theta\cdot(-\operatorname{sen}\theta) & (\cos\theta)^2\end{pmatrix} =$$

comunicazioni: