

ESERCIZI PROF. IZA DEL BUONO:

es 1

materie

lezioni e compiti per il giorno _____

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- derivare le righe di EA in termini delle righe di A
- derivare le colonne di AE in termini delle colonne di A

$$[EA]_{ik} = E_{i1} \cdot A_{1k} + E_{i2} \cdot A_{2k} + E_{i3} \cdot A_{3k} \quad (= i\text{-esima riga del prodotto } EA = i\text{-esima riga di } E \text{ per } A.)$$

materie

lezioni e compiti per il giorno _____

$$[EA]_{ik} = e_{i1} \cdot A_{1k} + e_{i2} \cdot A_{2k} + e_{i3} \cdot A_{3k} \quad \text{con } i=1-3$$

$$= \sum_{k=1}^3 e_{ik} \cdot A_{k*}$$

quindi:

$$[EA] = \begin{pmatrix} 1 \cdot A_{1*} \\ 1 \cdot A_{2*} \\ 3 \cdot A_{1*} + A_{3*} \end{pmatrix} = P \begin{matrix} \text{le righe di EA sono} \\ \text{combinazioni lineari} \\ \text{delle righe di A.} \end{matrix}$$

⇓

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ A_{3*} \end{pmatrix}$$

devo derivare la matrice A, come vettore colonna
per le righe del prodotto matriciale

$$[AE]_{*j} = A \cdot E_{*j} \quad \begin{matrix} \text{materie} & \text{lezioni e compiti per il giorno} \end{matrix} \quad \left(= j\text{-esima colonna del prodotto } AE = A \text{ per la } j\text{-esima colonna di } B \right)$$

$$[AE]_{*j} = A_{*1} e_{1j} + A_{*2} e_{2j} + A_{*3} e_{3j} = \text{con } i=1-3$$

$$= \sum_{k=1}^3 A_{*k} \cdot e_{kj}$$

$$AE = (A_{*1} \cdot 1 + A_{*3} \cdot 3, A_{*2}, A_{*3})$$

AE =

↳ le colonne di AE sono combinazioni lineari delle colonne di A

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comunicazioni:

matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lezioni e compiti per il giorno _____

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definizione: il j -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ è:

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tutti 0, tranne 1 in } j\text{-esima posizione.}$$

Calcolare i seguenti prodotti:

- 1) $A \cdot e_j$
- 2) $e_i^T \cdot A$
- 3) $e_i^T \cdot A \cdot e_j$

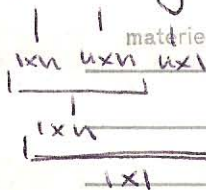
1) $A \cdot e_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (è un vettore colonna)

$= A_{*j} \Rightarrow$ moltiplichiamo una matrice per un vettore canonico di ordine n , si estrae la colonna j -esima della matrice

2) $e_i^T \cdot A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (è un vettore riga)

$= A_{i*} \Rightarrow$ moltiplichiamo una matrice per il vettore canonico di dimensione n , si estrae la riga i -esima della matrice

3) $e_i^T A e_j$ ($\Rightarrow$ determinare un valore)



lezioni e compiti per il giorno _____

$$e_i^T A = A_{i*}$$

$$A_{i*} \cdot e_j = a_{ij} \Rightarrow \text{dalla riga } i\text{-sima} \text{ e moltiplico l'elemento } j\text{-simo}$$

$\Rightarrow$ differenziazione grafica:

materie

lezioni e compiti per il giorno _____

comunicazioni:

$\Delta =$

en.3

dato $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

materie

lezioni e compiti per il giorno

$$\text{calcola } (A+B)^2 =$$

$$= (A+B)(A+B) =$$

$$= A^2 + \underline{AB + BA} + B^2$$

↳ il prodotto non è commutativo:

$$AB \neq BA$$

↳ quindi $AB = BA$?

en.4

dato $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$

materie

lezioni e compiti per il giorno

$$L = \begin{pmatrix} I_k - BA & B \\ 2A - ABA & AB - I_n \end{pmatrix}$$

verifica che $L^2 = I_{(k+n)}$

↳ per prima cosa bisogna verificare che il prodotto $L \times L$ sia fattibile.

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{k \times k} & \boxed{k \times n} \\ \boxed{n \times k} & \boxed{n \times n} \end{pmatrix}$$

comunicazioni

↳ $k+n$

$$L \in \mathbb{R}^{(k+n) \times (k+n)}$$

k dimensioni
 $=$ non concordi:
 è fattibile
 effettuare il
 prodotto
 $L \times L$

materie lezioni e compiti per il giorno _____
 per gli studenti che $L = I$ vuole il calcolo:

$$L^2 = L \times L = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{pmatrix}_{k+n}$$

$$\textcircled{1} (I_k - BA)^2 + B \cdot (ZA - ABA)$$

$$\textcircled{2} (I_k - BA) \cdot B + B(AB - I_n)$$

$$\textcircled{3} (ZA - ABA)(I_k - BA) + (AB - I_n)(ZA - ABA)$$

$$\textcircled{4} (ZA - ABA) \cdot B + (AB - I_n)^2 \cdot (AB - I_n)$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} I_k^2 + \cancel{BABA} - \cancel{BA} - \cancel{BA} + \cancel{ZBA} - \cancel{BABA}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \cancel{I_k B} - \cancel{BA/B} + \cancel{BA/B} - \cancel{B I_n} = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{3} \cancel{ZAI_k} - \cancel{ZABA} - \cancel{ABAI_k} + \cancel{ABABA} + \cancel{ZABA} - \cancel{ABABA} - \cancel{Z I_n A} + I_n ABA = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{4} \cancel{ZAB} - \cancel{ABAB} + \cancel{ABAB} + I_n - \cancel{AB} - \cancel{AB} = I_n$$

$$L^2 = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} k \times k \\ I_k \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} k \times n \\ 0 \end{matrix}} \\ \hline \boxed{\begin{matrix} n \times k \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} n \times n \\ I_n \end{matrix}} \end{array} \right) = I_{k+n}$$

comunicazioni:

en. 5

siano $A, B, A+B$ non singolari

materie

lezioni e compiti per il giorno

dimostriamo che $A^{-1} + B^{-1}$ è non singolare.

per:

$$\underbrace{(A^{-1} + B^{-1})}_{(1)} = \underbrace{A(A+B)^{-1}}_{(2)} \cdot \underbrace{B}_{(3)} = \underbrace{B(A+B)^{-1}}_{(3)} \cdot \underbrace{A}_{(2)}$$

poiché per def. di inversa una matrice B è l'inversa di $A \Leftrightarrow AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$

$\Downarrow$

- moltiplichiamo (1) · (2) e verifichiamo se $I = I$
- moltiplichiamo (1) · (3) e verifichiamo se $I = I$

$$\bullet (A^{-1} + B^{-1}) \cdot A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

materie

lezioni e compiti per il giorno

$$= \underbrace{(A^{-1}A + B^{-1}A)}_{I = B^{-1}B} \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

$$= (B^{-1}B + B^{-1}A) \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

$$= B^{-1} \underbrace{(B+A)(A+B)^{-1}}_{LP = I \text{ per ipotesi } (A+B) \text{ è non singolare}} \cdot B =$$

$$= \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{LP \text{ per ipotesi } B \text{ è non singolare}} = I$$

LP per ipotesi B è non singolare.

$$\bullet (A^{-1} + B^{-1}) \cdot B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A =$$

comunicazioni:

$$= \underbrace{(A^{-1}B + B^{-1}B)}_I (A+B)^{-1} \cdot A =$$

$$= (A^{-1}B + A^{-1}A) (A+B)^{-1} \cdot A =$$

$$= A^{-1} (B+A) (A+B)^{-1} \cdot A =$$

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1} (B+A)}_I \underbrace{(A+B)^{-1} \cdot A}_I}_I$$

$$= I$$

en. 4.6

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{rank}(A) = n$$

canonica la matrice $B = (A^T A)^{-1} A^T$

prova che $BA = I_n$ cioè A è invertibile e $B = A^{-1}$

$$BA = (A^T A)^{-1} A^T A$$

basta provare che: $A^T A$ è non singolare

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A A^T) = n$$

ricorda:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \underbrace{A^T}_{n \times m} A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



$$A^T A \Rightarrow \text{rank} = n \Rightarrow \text{rank}(A) = n \Rightarrow \text{rank}(A) = n$$

$\Rightarrow$ n righe e colonne linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ $\det(AA^T) \neq 0 \Rightarrow A^T A$ è non singolare



$$(A^T A)^{-1} A^T A = I_n$$

en. 7

sia $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

materie lezioni e compiti per il giorno _____

$$P = I_n - \frac{vv^T}{v^T v}$$

prova che P è ortogonale
 $\Downarrow$

P è ortogonale $\Leftrightarrow P^T P = I = P P^T$ (= la matrice inversa coincide con la matrice trasposta.)

① $P^T P = I$

② $P P^T = I$

calcolo prima P^T :

$P^T = \left(I_n - \frac{vv^T}{v^T v} \right)^T =$

$(n \times n)$ $(1 \times n)$ $(n \times 1)$ $\rightarrow$ $(n \times n)$ MATRICE

materie lezioni e compiti per il giorno _____

$= I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot (vv^T)^T =$

$(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(1 \times n)$ $\rightarrow$ $(n \times n)$ SCALARE

PROPRIO $(AB)^T = B^T A^T$

$\downarrow$ ho invertito i termini

$= I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot (v^T)^T \cdot v =$

$= I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot vv^T = P$

① $P^T P = P P =$

$= \left(I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot vv^T \right) \left(I_n - \frac{2}{v^T v} \cdot vv^T \right) =$

MATRICE

comunicazioni

SCALARE

$= I_n - I_n \cdot \frac{2}{v^T v} \cdot vv^T - \frac{2}{v^T v} \cdot vv^T + \frac{4}{(v^T v)(v^T v)} \cdot (vv^T)(vv^T) =$

$$= I_u - \frac{4}{rT} \cdot vT + \frac{4}{rT} \cdot vT =$$

materie

lezioni e compiti per il giorno

A SCALE

$$= I_M$$

ka. ② ē ortogonalitāte, jo īpaši $PP^T = P^T P = P^T P^T P = I_n$

2.8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculate Π for $K(A)$

material

dim

3

lezioni e compiti per il giorno

$\text{rank}(A) = \text{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{numero di righe} \\ \text{numero di colonne} \end{array} \right\}$

$$\text{vec}(A) = 0 \quad \text{für } A_{12} = -\frac{1}{2} A_{21}$$

des les records coloniales avec l'histoire
livre de deux films coloniaux

$$\text{rank}(A) \leq 3$$

5

considera se matrice 2×2 e verifica se ha
eigenvalore diverso da 0 e il cui autovettore $\neq 0$
ne con. forme: $\text{rank}(A) = 2$

de con. forme: $\text{rank}(A) = 2$

comunicazioni:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$$



$$\text{rank}(A) = 2$$

= p column 1 + 5 $\cdot$ column 2 (unabhängig von p)

en.9

determinare i vettori che generano lo spazio nullo
della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$\text{Nul}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{u \times 1} \mid Ax = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

con $u=3$

(= insieme delle soluzioni del
sistema omogeneo $Ax=0$)

osservazione:

$\text{Rk}(A)=1 \Rightarrow$ poiché tutte le righe e tutte le
colonne sono combinazioni lineari
le uniche diverse sono

materie

lezioni e compiti per il $\frac{u}{n}$ giorno

la dim. delle equazioni indipendenti con
dei $\neq 0$ è 1 cioè i singoli elementi della matrice A

Per trovare $\text{Nul}(A)$ applico la definizione:
binomio tutto le $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soluzioni del sistema
omogeneo $Ax=0$.

$\Downarrow$

$$\text{poiché } Ax = 2 \cdot A_1$$

considero solo la riga A_1 :

$$A_1 \cdot x = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

comunicazioni:

per il risultato so
che è quello che
devo trovare.

$\Downarrow$

quindi:

$$x \in \text{N}(A) \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3$$

$$x = \begin{pmatrix} -x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

materie lezioni e compiti per il giorno

scriviamo x come combinazione lineare di x_1 e x_2

$$= x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

perché nella 1ª riga non c'è x_2
perché nella 3ª riga x_3 è presente con coeff. 1

$$NA = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

= piano passante per l'origine e per i punti

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{perché siamo in } \mathbb{R}^3)$$

materie lezioni e compiti per il giorno

Se formassimo vettori in $\mathbb{R}^2$ sarebbe stata una retta passante per l'origine.

es 10 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

calcoliamo il rango di A

per def.

$$\text{range}(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.t. } Ax = y \right\} =$$

comunicazioni: (linearmente indipendenti)

= sotto-spazio generato dalle colonne di $A =$

= $\text{span} \{ A_{*1}, A_{*2}, A_{*3} \} =$

$$= \text{span} \{ A_{11}, 2A_{12}, 3A_{13} \} =$$

materie

lezioni e compiti per il giorno _____

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{risultato prima colonna generata da} \\ \text{operazioni lineari, le due sono} \\ \text{combinazioni lineari della} \\ \text{prima.}$$

$\text{range}(A^T) =$ spazio generato dalle righe di $A =$

$$\text{span} \{ A_{1x}, A_{2x} \} =$$

$$= \text{span} \{ A_{1x}, 2A_{2x} \} =$$

$$= \text{span} \{ (1, 2, 3) \} \subset \mathbb{R}^3$$

materie

lezioni e compiti per il giorno _____

es. 11

determinare AUTOCVALORI e AUTOVETTORI della
matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

gli autovettori della matrice A sono le soluzioni di
del polinomio caratteristico $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ 20 & 3-\lambda & 10 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

comunicazioni:

SOTTRARRE λ SOLTANTO
DALLE COMPONENTI DELLA
DIAGONALE $(-I)$

$$\begin{array}{ccc|cc} \overset{\swarrow +}{-3-\lambda} & \overset{\swarrow +}{4} & \overset{\swarrow + \nwarrow -}{-3-\lambda} & \overset{\nwarrow -}{-3-\lambda} & \overset{\nwarrow -}{1} \\ 20 & 3-\lambda & 10 & 20 & 3-\lambda \\ 2 & -2 & 4-\lambda & 2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (-3-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 20 + 6 \cdot 20 - \\ & - \left(-6(3-\lambda) + (-20)(-3-\lambda) + 20(4-\lambda) \right) = \\ & = (-9 + \cancel{3\lambda} - \cancel{3\lambda} + \lambda^2)(4-\lambda) + 20 + 120 - \\ & \quad (-18 + 6\lambda + 60 + \cancel{20\lambda} + 80 - \cancel{20\lambda}) = \\ & = -36 + \underline{9\lambda} + \underline{4\lambda^2} - \lambda^3 + 20 + 120 - 122 - \underline{6\lambda} = \\ & = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18 = \\ & = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = p(\lambda) \Rightarrow \text{POLINOMIO} \end{aligned}$$

CARATTERISTICO

è un polinomio di 3° grado: deve avere 3 radici



per il TEOREMA delle radici razionali:

un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$
 di grado n , con $a_n = 1$ (e p primitivo) ha le radici tra i divisori interi
 di a_0 (il termine noto)

comunicazioni:



poi si costruisce e verifica se $r=0$ $p(x)$ oppure farlo
 con il metodo dei Ruffini

tutte le radici sono in $\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18 \}$
 materie lezioni e compiti per il giorno

costruiamo i valori di $p(x)$ e verifichiamo $p=0$:

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$$

-2 è radice $\Rightarrow p(-2) = 0$

3 è radice $\Rightarrow p(3) = 0$

verifichiamo molteplicità:

	+1	-4	-3	18
-2		-2	+12	+18
-2	+1	-6	+9	//
-2		-2	-24	
	1	+12	15	

$\Rightarrow -2$ è soluzione
con molteplicità
 $= 1$

	1	-4	-3	18
3		3	-3	-18
3	1	-1	-6	//
3		3	6	
	1	2	//	

$\Rightarrow -3$ è soluzione
con molteplicità
 $= 2$

$(\text{signatura}(A)) \quad \Downarrow \quad (\text{geometria}(A))$

$\lambda = -2 \Rightarrow p \text{ ha } 1 \text{ autovalore}$

$\lambda = 3 \Rightarrow p \text{ ha } 2 \text{ autovalori}$

↙

Def. $\text{algebra}(A) = \text{multiplicità algebrica di } \lambda =$
 $= \# \text{ volte in cui } \lambda \text{ è radice di } p(\lambda)$

Def. $\text{geom}(A) = \text{multiplicità geometrica di } \lambda =$
 $= \dim N(A - \lambda I) = \# \text{ max di autovettori}$
 di λ associati a λ

↘

$$\text{geom}(A) \leq \text{algebra}(A)$$

↘

bisogna calcolare gli autovettori:

Def. (λ, x) autovettore $\Leftrightarrow x \in N(A - \lambda I)$

↙

$$N(A - \lambda I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)x = 0 \right\} =$$

= insieme delle soluzioni del sistema
 omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$

↘

per ogni λ autovalore individuato bisogna
 calcolare l'autovettore associato.

$\lambda = -2$

$$(A - \lambda I) = (A + 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

comunicazioni:

calcolo $N(A)$ ogni λ ha i suoi vettori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq (A + 2I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 \text{ (semplifica bene)}$$

materie lezioni e compiti per il giorno

applico il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere la matrice:

1° ELEMENTO PIVOTALE

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 = R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot R_1$$

$$\Rightarrow R_3 = R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot R_1$$

2° SECONDO ELEM. PIVOTALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 = R_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot R_2$$

materie lezioni e compiti per il giorno

PER RISOLVERE IL SECONDO SISTEMA

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_3 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \end{cases}$$

comunicazioni:

Tutti gli $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$ sono soluzioni del sistema omogeneo

$N(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\lambda = 3$$

$$(A - \lambda I) = (A - 3I) = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

per trovare i vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$(A - 3I)x = 0$$

↘

applico la scaletta di Gauss alla matrice:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{3}(-3) \\ 0 & -2 + \frac{1}{3} & 1 + \frac{1}{3}(-3) \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 = R_2 + \frac{2}{3}R_1$$

$$\Rightarrow R_3 = R_3 + \frac{2}{3}R_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \text{ ho invertito le righe}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Delta = P$$

$$\Delta = P \begin{cases} -6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -\frac{5}{3}x_2 = 0 \\ x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_2 - 3x_3}{6} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 \end{cases}$$

^{lezione}
 i vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soluzioni del sistema omogeneo
 non ^{materie} del ^{lezioni e compiti per il giorno} tipo: _____

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + 3I) = 0 \text{ per } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

^{fine}
 fine esercizio "Autovetture e
 autovalori" :)

es. 12

per trovare le autovalori e i vettori propri di un dato
 autovettore e autovalore, determiniamo prima gli
 autovalori e i vettori propri della matrice A
 e identifichiamo i vettori propri.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

comunicazioni:

utilizzo la definizione di autovalore:

def. materie lezioni e compiti per il giorno

$$x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x \text{ autovettore} \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

(il λ è un numero reale e
distinguo λ da x o
altrimenti)

data A e gli x_i per verificare se sono autovettori
verifico che Ax sia un multiplo di x .
il λ , fattore di moltiplicazione è il valore.

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} (-9)(-1) + (-6) - 4 \\ (-8)(-1) - 6 \\ -20 + 15 + 5 \\ -32 + 21 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$$

$x_1 = 1$

$Ax_1 =$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 1 \\ 4 \times 1 & 4 \times 1 \end{pmatrix}$
(lett. colonne)

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} -9+2 \\ -8+3 \\ 20-8 \\ 32-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{non è autovettore della matrice } A.$$

comunicazioni:

$$Ax_3 = \begin{pmatrix} 9-4-8 \\ 8+6+2 \\ -20+16+10 \\ -32+14+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3 \Rightarrow d=3$$

$x_3 = 1$

$$Ax_4 = \begin{pmatrix} -6+6 \\ -8+9 \\ 15-24 \\ 21-21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3 \Rightarrow d=3$$

$x_4 = 1$

es. 13

calcolare il $R(A)$ (range) e $N(A)$ (nucleo) di A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^5 \text{ s.t. } Ax = y \} = \text{spazio}$$

generato dalle colonne linearmente indipendenti di A



Gruppo di matrice A massima e le condizioni di Gauss.



le colonne l.i. $\in R(A)$ non esiste coefficiente l'elemento pivotale.



GAUSS-JORDAN perché A non è invertibile.

1° SEM. PIU' TARE

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{materie} \\ \text{lezioni e compiti per il giorno} \end{array}$$

$\Rightarrow R_2 = R_2 + 2R_1$
 $\Rightarrow R_3 = R_3 - R_1$

2° SEM. PIU' TARE

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 = R_3 - \frac{1}{2} R_2$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3-6 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

materie lezioni e compiti per il giorno

$\Downarrow$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A \text{ (volchiamo così)}$$

$\Downarrow$

le colonne linearmente indipendenti di A sono quelle contenenti gli elementi pivotati: 1° e 3°

$\Downarrow$

La spazio colonna di A è generato dalle colonne 1 e 3 di A:

comunicazioni:

$$R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$ = tutti i vettori soluzioni del sistema omogeneo.

materie

lezioni e compiti per il giorno



la riduzione di GAUSS permette di ottenere matrici EQUIVALENTI, cioè con le STESSS SOLUTIONI



operati così:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid E_A x = 0\}$$



semplifico prima E_A :

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

materie

lezioni e compiti per il giorno

$$E_A \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_3 + 3x_4 + 4x_5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 \\ x_2 \\ x_3 = -3x_4 + 4x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 = -3x_4 - 4x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$A=P \left(\begin{array}{c|c} -2x_2 + 2x_4 - x_5 & \text{materie} \\ \hline -3x_4 - 4x_5 & \text{lezioni e compiti per il giorno} \\ \hline x_4 & \\ \hline x_5 & \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{matrici} \\ \text{di vettori} \end{array} \quad (x_2, x_4, x_5)$$

$$A=P \left(\begin{array}{c} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 2x_4 \\ 0 \\ -3x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} -x_5 \\ 0 \\ -4x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{array} \right) =$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{materie} \\ \text{lezioni e compiti per il giorno} \end{array}$$

Tutti i vettori x in $=0$ questa forma $\in N(A)$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

NB. $\lambda = QR \rightarrow$ vettore