EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE (ED. Del Buono)

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE OMOGENEA

$$\begin{cases} 2y(n-2)+3y(n-1)+y(n)=0 \\ y(-1)=1 \\ y(-2)=0 \end{cases}$$

$y(-1)=1$, $y(-2)=0$ ⇒ condizioni iniziali (sono 2 perché $M=2$)

⇒ EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE DEL II ORDINE (⇒ $M=2$ ⇒ dipende da due valori precedenti) OMOGENEA (⇒ termine noto $=0$)

⇓

metto in ordine dal grado massimo:

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=0$$

⇓

costruisco il polinomio caratteristico $p(z)=z^M+a_1\cdot z^{M-1}+\dots a_M$
(NB. il coefficiente di $y(n)$ deve essere $=1$. se è $\neq 1$ si divide tutto per quel coefficiente.)

$$p(z)=z^2+3z+2$$ (= POLINOMIO CARATTERISTICO)

⇓

calcolo le radici $z_{1,2}$ di $p(z)$:

$$z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}-2=z_2\\-1=z_1\end{cases}$$

⇓

Trovo le soluzioni generali dell'omogenea:

$$y(n)=c_1\cdot z_1^n+c_2\cdot z_2^n$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie che per essere determinate univocamente richiedono l'imposizione di M condizioni iniziali.

$$y(n)=c_1\cdot(-1)^n+c_2\cdot(-2)^n$$

⇓

calcolo c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(-1)=1 \iff c_1\cdot(-1)^{-1}+c_2(-2)^{-1}=1 \\ y(-2)=0 \iff c_1\cdot(-1)^{-2}+c_2(-2)^{-2}=0 \end{cases}$$

e risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} -c_1-\frac{1}{2}c_2=1 \\ c_1+c_2\cdot\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1-c_2=2 \\ 4c_1+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1+4c_1=2 \\ c_2=-4c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-4 \end{cases}$$

⇓

sostituisco in $y(n)$ e ottengo la soluzione all'equazione alle differenze:

$$y(n)=1\cdot(-1)^n+(-4)\cdot(-2)^n=(-1)^n+2^{n+2}$$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE COMPLETA CON TERMINE NOTO COSTANTE

$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 3$ $\Rightarrow$ EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE DEL II ORDINE COMPLETA ($M=2$ $\Rightarrow$ dipende dai due valori precedenti) CON TERMINE NOTO COSTANTE

$\Downarrow$

è nella forma:

$$y(n) + \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i \cdot x(n-i)$$

$\Downarrow$

una qualunque soluzione della completa si può ottenere come soluzione della omogenea + soluzione particolare della completa.

$$y(n) = \underbrace{w(n)}_{\substack{\text{soluzione}\\\text{omogenea}}} + \underbrace{\bar{y}(n)}_{\substack{\text{soluzione}\\\text{particolare}\\\text{della}\\\text{completa.}}}$$

$\Downarrow$

Troviamo le soluzioni particolari della completa $\bar{y}(n)$

per definizione:

sia $y(n) + \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot y(n-i) = g$ con g=costante

un'equazione alle differenze completa con termine noto costante.

sia $p(z) = z^M + \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot z^{M-i}$ con $p(1) \neq 0$

il corrispondente polinomio caratteristico

allora:

$\bar{y}(n) = \bar{y} = \dfrac{g}{p(1)}$ è soluzione particolare

$\Downarrow$

$p(z) = z^M + 3z + 2$ $\Rightarrow$ $p(1) = 1^M + 3 \cdot 1 + 2 = 6$

$\bar{y}(n) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\Downarrow$

Troviamo le soluzioni dell'omogenea ($w(n)$)

$\Downarrow$

Trovo le radici $z_{1/2}$ del polinomio caratteristico $p(z)$:

$$z_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 = z_2 \\ -1 = z_1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Trovo le soluzioni generali dell'omogenea: ($w(n) = c_1 \cdot z_1^n + c_2 \cdot z_2^n$)

$w(n) = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot (-2)^n$

$\Downarrow$

Trovo le soluzioni generali della completa:

$y(n) = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot (-2)^n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ NB. se ci fossero state le condizioni iniziali avrei dovuto calcolare c_1 e c_2 e sostituirli nella formula.

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE COMPLETA (DEL II ORDINE) CON TERMINE NOTO DI PRIMO GRADO

$$\begin{cases} y(n) - 8y(n-1) + 15y(n-2) = 2n+1 \\ y(-1) = y(-2) = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

① una qualunque soluzione della completa si può ottenere come somma della soluzione dell'omogenea e di una soluzione particolare della completa.

$$y(n) = \underbrace{w(n)}_{\text{soluzione omogenea}} + \underbrace{\bar{y}(n)}_{\text{soluzione particolare della completa}}$$

② $\Downarrow$

Calcolo la $\bar{y}(n)$ soluzione particolare della completa:

$\Downarrow$

poiché il termine noto è di primo grado, le soluzioni $\bar{y}(n)$ saranno del tipo:

$$\bar{y}(n) = An + B$$

con A e B costanti da determinare.

$\Downarrow$

sostituendo nell'equazione si ha:

$$\bar{y}(n) - 8\bar{y}(n-1) + 15\bar{y}(n-2) = 2n+1$$

$\Downarrow$

$$(An+B) - 8\left[A(n-1)+B\right] + 15\left[A(n-2)+B\right] = 2n+1$$

$\Downarrow$

svolgo le operazioni:

$$An+B-8(An-A+B)+15(An-2A+B) = 2n+1 \iff$$

$$\iff \underline{An} + B \underline{-8An} + 8A - 8B \underline{+15An} - 30A + 15B = 2n+1$$

$\Downarrow$

metto in evidenza i termini con la n e i termini noti per poter eguagliare le due parti dell'equazione:

$$n(A-8A+15A) + (B+\underline{8A}-8B\underline{-30A}+15B) = 2n+1 \iff$$

$$\iff \underbrace{n(8A)} + \underbrace{(-22A+8B)} = \underbrace{2n} + \underbrace{1}$$

$\Downarrow$

eguaglio i termini con n dei due membri dell'equazione e i termini noti e risolvo il sistema per calcolare le costanti A e B

$$\begin{cases} 8A = 2 \\ -22A + 8B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ -\cancel{22}^{11} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} + 8B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ -11 + 16B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{13}{16} \end{cases}$$

$\Downarrow$

la soluzione particolare $\bar{y}(n)$:

$$\bar{y}(n) = \frac{1}{4} n + \frac{13}{16}$$

③

$\Downarrow$

Calcolo le soluzioni dell'omogenea $w(n)$:

$\Downarrow$

Calcolo il polinomio caratteristico $p(z)$:

$$p(z) = z^2 - 8z + 15$$

$\Downarrow$

Trovo le radici di $p(z)$:

$$z_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 = z_1 \\ 5 = z_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Trovo le soluzioni generali dell'omogenea: $(w(n) = c_1 \cdot z_1^n + c_2 \cdot z_2^n)$

$$w(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n$$

$\Downarrow$

④

Calcolo le soluzioni della completa:

$$y(n) = w(n) + \bar{y}(n)$$

$$y(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n + \frac{1}{4} n + \frac{13}{16}$$

$\Downarrow$

Calcolo c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(-1) = 0 \iff c_1 \cdot 3^{-1} + c_2 \cdot 5^{-1} + \frac{1}{4}(-1) + \frac{13}{16} = 0 \\ y(-2) = 0 \iff c_1 \cdot 3^{-2} + c_2 \cdot 5^{-2} + \frac{1}{4}(-2) + \frac{13}{16} = 0 \end{cases}$$

e risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{13}{16} = 0 \\ \frac{c_1}{9} + \frac{c_2}{25} - \frac{1}{2} + \frac{13}{16} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80c_1 + 48c_2 - 60 + 195 = 0 \\ 400c_1 + 144c_2 - 1800 + 2925 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 80\,c_1 + 48\,c_2 + 135 = 0 \\ 400\,c_1 + 144\,c_2 + 1125 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -48\,c_2 - 135 \\ 400\,(-48\,c_2 + 135) + 144\,c_2 + 1125 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -48\,c_2 - 135 \\ -19200\,c_2 + 52800 + 144\,c_2 + 1125 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -48\,c_2 - 135 \\ -19056\,c_2 + 53925 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dots \\ c_2 = \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ... PROBABILMENTE HO SBAGLIATO QUALCHE CALCOLO! :)
MA IL PROCEDIMENTO E' QUESTO! :)

$$\Downarrow$$

sostituisco c_1 e c_2 nella $y(n)$ soluzione della completa