Applichiamo Gauss ad A per calolare rank(A)

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & -4 & \\ 0 & 0 & 2 & -4 & R2<-R2+R1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R3<-R3-2R1 \end{matrix}$$

rank (A) = 2

Calcoliamo AA^T

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 27 & -9 & 54 \\ -9 & 11 & -18 \\ 54 & -18 & 108 \end{matrix}$$

Applichiamo Gauss ad AA^T

$$\begin{matrix} 27 & -9 & 54 \\ -9 & 11 & -18 \\ 54 & -18 & 108 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 27 & -9 & 54 & \\ 0 & 8 & 0 & R2<-R2+1/3R1 \\ 0 & 0 & 0 & R3<-R3-2R1 \end{matrix}$$

rank (AA^T) = 2.

Per la seguente proprietà del rank rank(AB) = rank(BA) ponendo B = A^T risulta che rank(AA^T) = rank (A^TA) = 2 (potremmo quindi evitare di calcolare A^TA e poi applicare Gauss)

Per completezza e per verfica

Calcoliamo A^TA

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 18 & 54 & 12 & -60 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \\ -20 & -60 & -20 & 80 \end{matrix}$$

Applichiamo Gauss ad A^TA

$$\begin{matrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 18 & 54 & 12 & -60 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \end{matrix}$$

-20 -60 -20 80

6 18 4 -20
0 0 0 0 R2<-R2-3R1
0 0 10/3 -20/3 R3<-R3-2/3R1
0 0 -20/3 40/3 R4<-R4+10/3R1

6 18 4 -20
0 0 10/3 -20/3
0 0 0 0
0 0 -20/3 40/3

6 18 4 -20
0 0 10/3 -20/3
0 0 0 0 R3<-R3-0R2
0 0 0 0 R4<-R4-2R2

rank (A^TA) = 2.