

Capitolo 13

Derivate di ordine superiore

13.1 Derivata seconda

Definizione 13.1 Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in A$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile in un intorno di x_0 . Si definisce derivata seconda di f in x_0 il limite

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Come per la derivata prima, anche per la derivata seconda esistono simboli alternativi

$$f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Interpretazione geometrica

Stando alla definizione, nel parlare di derivata seconda di f in un punto x_0 si presuppone che nello stesso punto esista e sia finita la derivata prima, quindi abbia senso parlare di retta tangente. La quantità $f''(x_0)$ fornisce un'indicazione sulla posizione del grafico di f rispetto alla retta tangente.

Proposizione 13.2 Se $f''(x_0) > 0$ allora, in un intorno di x il grafico di f si trova al di sopra della retta tangente.

Come per la derivata prima questo giustifica la definizione seguente.

Definizione 13.3 I punti in cui si annulla la derivata seconda si dicono di flesso.

Infatti in forza della proposizione precedente, se in un x_0 la funzione “attraversa” la retta tangente, necessariamente il punto x_0 è di flesso (oppure $f''(x_0)$ non esiste).

Non solo il segno di $f''(x_0)$ è rilevante, ma anche il valore, nel senso che quanto più è grande $|f''(x_0)|$ tanto più il grafico di $f(x)$ è discosto dalla retta tangente in x_0 . Cerchiamo di spiegare questa affermazione con una figura. Si abbiano due funzioni

$$\begin{aligned} f_1 & : A \rightarrow \mathbf{R} \\ f_2 & : A \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

Sia $x_0 \in A$ punto interno. Supponiamo che

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= y_0 = f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) &= m_0 = f_2'(x_0) \end{aligned}$$

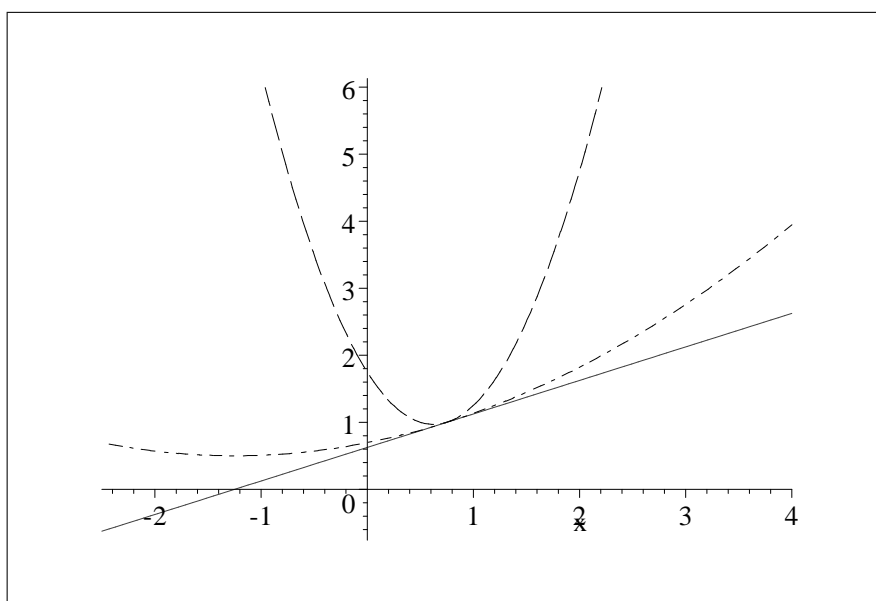
Queste due condizioni implicano che entrambi i grafici passano per il punto (x_0, y_0) e che in questo punto presentano la stessa retta tangente

$$y = y_0 + m_0(x - x_0).$$

Supponiamo ora che

$$0 < f_1''(x_0) < f_2''(x_0)$$

La situazione che avremo simile a quella rappresentata nella figura seguente.



Abbiamo scelto due funzioni con le seguenti caratteristiche

$$\begin{aligned} f_1(3/4) &= f_2(3/4) = 1, \\ f_1'(3/4) &= f_2'(3/4) = 1/2. \end{aligned}$$

Quindi i due grafici si incontrano nel punto $(3/4, 1)$ in cui presentano la stessa retta tangente

$$y = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right).$$

E' evidente che il grafico di f_2 (tratteggiato) è ben più discosto dalla retta tangente rispetto al grafico di f_1 (tratteggio punto-linea), infatti

$$f_1''(3/4) = 3/4, \quad f_2''(3/4) = 12.$$

Teorema 13.4 (condizione sufficiente per i punti di estremo) ...

La dimostrazione si basa sulla monotonia in un punto applicata alla funzione f' . Ottenuto il segno di f' si ricostruisce l'andamento di f .

Sussiste un controesempio $f(x) = x^4$

13.2 Derivate successive

Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0 , f' derivabile in un intorno di x_0 . Poiché la funzione reale f'' è definita in un intorno di x_0 , ha senso il seguente limite

$$f^{(3)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$$

che prende il nome di derivata terza di f in x_0 .

Simboli equivalenti...

Se f è derivabile $n - 1$ volte in un intorno di x_0 ha senso il seguente limite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

che prende il nome di ...

Ovviamente, per uniformare la simbologia, possiamo introdurre le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) \\ f^{(1)}(x) &= f'(x) \\ f^{(2)}(x) &= f''(x). \end{aligned}$$

13.3 Polinomi di Taylor

Siano $I \subset \mathbf{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in I$. Diamo una definizione.

Definizione 13.5 Una funzione p si dirà approssimazione locale di f nel punto x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - p(x)) = 0.$$

In tal caso la quantità infinitesima

$$\epsilon(x) = f(x) - p(x)$$

prende il nome di errore.

Vogliamo ora studiare l'approssimabilità locale di f con funzioni polinomiali.

Supponiamo f continua in x_0 e consideriamo il polinomio di grado 0 (ossia la funzione costante)

$$p_0(x) = f(x_0).$$

Possiamo affermare che $p_0(x)$ rappresenta un'approssimazione locale della funzione. Infatti, in forza dell'ipotesi di continuità in x_0 , l'errore dato da

$$\begin{aligned} \epsilon_0(x) &= f(x) - p_0(x) \\ &= f(x) - f(x_0) \end{aligned}$$

tende a 0 quando $x \rightarrow x_0$.

Esempio 13.6 *Poiché la funzione \arctan è continua, il valore costante $\pi/4 = \arctan 1$ può essere considerato come un'approssimazione di $\arctan x$ in un intorno del punto $x_0 = 1$. In seguito cercheremo di valutare l'errore commesso quando si effettua tale approssimazione.*

Supponiamo ora f derivabile in x_0 e consideriamo il polinomio di I grado

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Abbiamo già osservato che la funzione $p_1(x)$ (il cui grafico coincide con la retta tangente) rappresenta una migliore approssimazione locale di $f(x)$; infatti la differenza

$$\epsilon_1(x) = f(x) - p_1(x)$$

non solo è infinitesima al tendere di $x \rightarrow x_0$, ma è anche ma è trascurabile rispetto a $x - x_0$.

Possiamo supporre che, aumentando l'ordine di derivabilità (o, come si suol dire, la regolarità) nel punto x_0 , si possa ottenere una approssimabilità con polinomi ancora migliore.

Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0 e che, a sua volta, f' sia derivabile in x_0 . Consideriamo il polinomio (di II grado)

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Teorema 13.7 (di Taylor) *Nelle ipotesi dette sopra risulta*

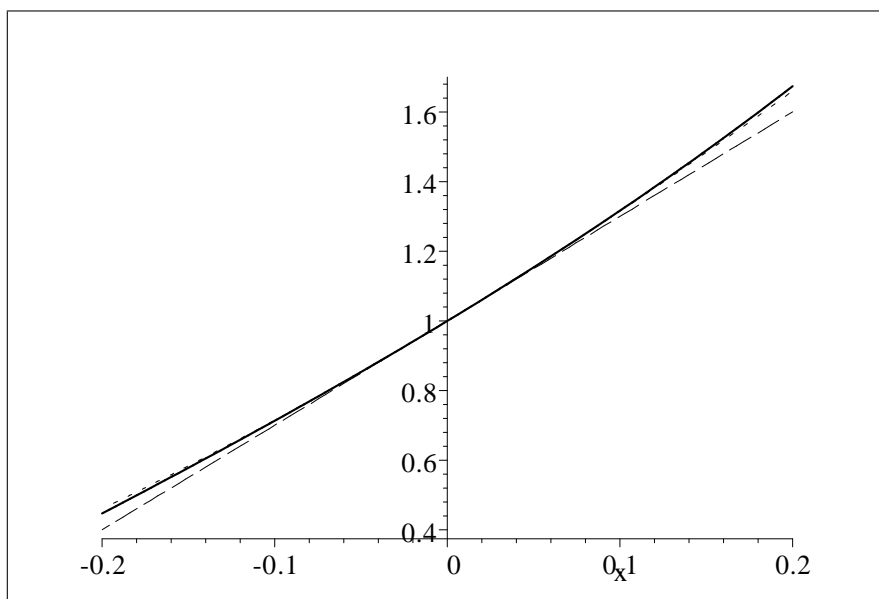
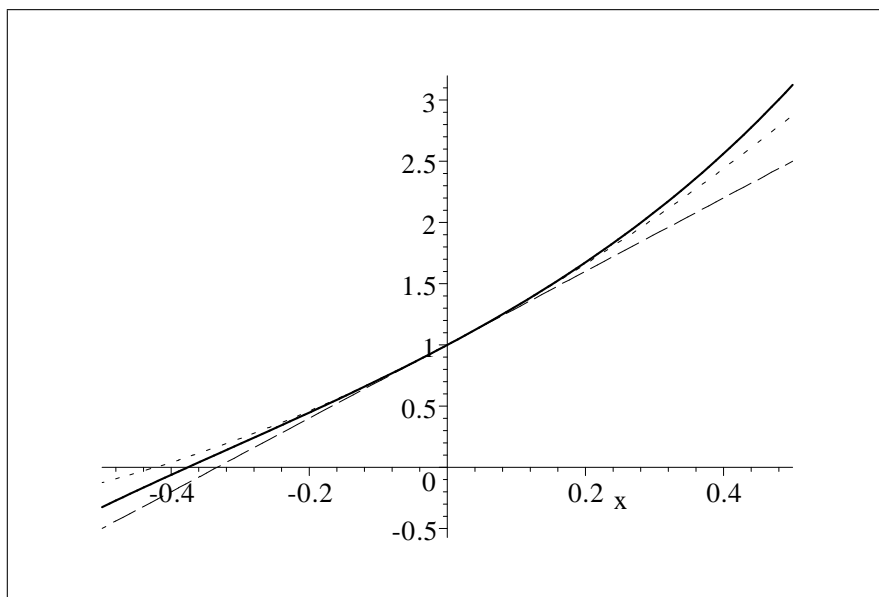
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Da questo teorema si deduce che l'approssimazione con $p_2(x)$ è migliore, in quanto per $x \rightarrow x_0$ l'errore

$$\epsilon_2(x) = f(x) - p_2(x)$$

è trascurabile rispetto a $(x - x_0)^2$, che a sua volta è trascurabile rispetto a $(x - x_0)$.

La cosa è evidente anche dalle figure seguenti, che riportano due diversi ingrandimenti della stessa situazione: linea continua f , linea tratteggiata p_1 , linea punteggiata p_2 ; nel secondo ingrandimento, ossia più vicino a $x_0 = 0$, p_2 è praticamente indistinguibile da f .



Dimostrazione. ... ■

Osservazione 13.8 Ammesso che $f''(x_0) \neq 0$, il grafico della funzione $p_2(x)$ è la parabola di equazione

$$y = p_2(x)$$

che prende il nome di parabola osculatrice in x_0 .

Questo processo si può iterare, ottenendo approssimazioni sempre più precise.

Se esiste $f^{(3)}(x_0) \in \mathbf{R}$, si può considerare il polinomio

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3.$$

In generale se esistono e sono finite le derivate in x_0 fino all'ordine n , si considera il polinomio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Definizione 13.9 *I polinomi p_n prendono il nome di polinomi di Taylor di ordine n di centro x_0 relativi alla funzione f .*

Nel caso generale il Teorema di Taylor si enuncia come segue.

Teorema 13.10 *Risulta*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Il teorema ci dice che, se in un intorno di x_0 approssiamo la funzione f con il polinomio p_n , commettiamo un errore trascurabile rispetto a $(x - x_0)^n$.

Osservazione 13.11 *Osserviamo che i polinomi di Taylor sono definiti da una formula di tipo ricorsivo*

$$\begin{cases} p_0(x) = f(x_0), \\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}. \end{cases}$$

L'approssimazione di $f(x)$ con $p_n(x)$ è e rimane locale. Ad esempio il polinomio di Taylor del III ordine di centro $x_0 = 0$ della funzione \sin è dato da

$$p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Se calcoliamo $p_3(3) = -3/2$ ci rendiamo conto che nel punto 3 il polinomio p_3 non possa essere considerato affatto un'approssimazione della funzione \sin .

Da questa osservazione consegue che per approssimare in punti diversi dobbiamo utilizzare polinomi diversi.

Esempio 13.12 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \log x$$

Nel punto $x_0 = 1/2$ il polinomio $p_3(x)$ è dato da

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -\log 2 + 2 \left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6x - \frac{11}{6} - \log 2. \end{aligned}$$

Nel punto $x_0 = 2$ il polinomio $p_3(x)$ è dato da

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \log 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3 = \\ &= \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{11}{6} + \log 2. \end{aligned}$$

Osservazione 13.13 *I polinomi di Taylor di centro $x_0 = 0$ prendono il nome di polinomi di McLaurin.*

Riportiamo una tabella i polinomi di McLaurin del IV ordine di alcune funzioni elementari.

$f(x)$	$p_4(x)$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$
$\sin x$	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

I termini mancanti corrispondono a derivate $f^{(k)}(0) = 0$. Quindi per la funzione \sin il polinomio p_4 viene a coincidere con il polinomio p_3 ; noi continueremo a chiamarlo p_4 per ricordare che il resto è trascurabile rispetto a x^4 .

Osservazione 13.14 *Si può dimostrare che per le funzioni pari (risp. dispari) il polinomio di McLaurin contiene solo termini di grado pari (risp. dispari).*

13.3.1 Valutazione del resto secondo Lagrange

Il teorema di Taylor ci dice che i polinomi p_n forniscono un'approssimazione locale di f . D'altra parte abbiamo visto che, utilizzando i polinomi di Taylor di centro x_0 "lontano" da tale punto, potremmo commettere errori grossolani. Pertanto rimane aperto il problema di *stimare* l'errore commesso quando si approssima $f(x)$ con $p_n(x)$ e valutare se tale errore è per noi accettabile. A questo scopo può fare comodo un'espressione più precisa dell'errore

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Ricordiamo che, nel caso dei polinomi di Taylor, l'errore ϵ_n viene detto comunemente *resto*.

Partiamo dall'approssimazione di ordine 0, quella che tiene conto della sola continuità. Se aggiungiamo l'ipotesi di derivabilità su tutto l'intervallo I , il Teorema di Lagrange ci fornisce un'espressione del resto. Infatti

$$\begin{aligned}\epsilon_0(x) &= f(x) - p_0(x) = \\ &= f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)\end{aligned}$$

essendo ξ un punto compreso tra x_0 e x .

Se in qualche modo sappiamo che la derivata è limitata, ossia

$$|f'(\xi)| \leq M,$$

abbiamo immediatamente la stima

$$|\epsilon_0(x)| \leq M |x - x_0|.$$

Esempio 13.15 *Riprendiamo l'Esempio ... Sappiamo di poter approssimare $\arctan\left(1 + \frac{1}{20}\right)$ con $\arctan 1 = \pi/4$. Cerchiamo ora di stimare l'errore.*

$$\epsilon_0 = \arctan\left(1 + \frac{1}{20}\right) - \arctan 1 = \frac{1}{20} D \arctan \xi$$

dove $\xi \in (1, 1 + 1/20)$. Ci è noto che

$$D \arctan \xi = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

e quindi

$$|D \arctan \xi| \leq 1.$$

Pertanto se approssimiamo $\arctan(1 + \frac{1}{20})$ con $\arctan 1 = \pi/4$ commettiamo un errore minore di $1/20 = 0.05$.

In realtà l'errore commesso è minore, infatti da $\xi \in (1, 1 + 1/20)$ otteniamo

$$\frac{400}{841} = \frac{1}{1 + (\frac{21}{20})^2} \leq \frac{1}{1 + \xi^2} \leq \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$|D \arctan \xi| \leq \frac{1}{2}.$$

Dunque l'errore commesso è minore di $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40} = 0.025$.

Vediamo ora come si passa agli ordini superiori. Anzitutto ci serve una generalizzazione del Teorema di Lagrange

Teorema 13.16 Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile $n + 1$ volte. Sia $x_0 \in I$ e sia p_n polinomio di Taylor di ordine n . Per ogni $x \in I$ esiste un punto $\xi \in I$, compreso tra x_0 ed x tale che

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

L'espressione a secondo membro prende il nome di *valutazione del resto secondo Lagrange*.

Osserviamo esplicitamente che, nel caso generale, per stimare l'errore di ordine n , occorre una maggiorazione della derivata $(n + 1)$ -esima

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M,$$

da cui si deduce

$$|\epsilon_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

13.3.2 Un cenno alle serie di Taylor

Come sopra siano assegnati $I \subset \mathbf{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in I$.

Abbiamo visto che se f è derivabile n volte possiamo scrivere il polinomio p_n il quale rappresenta un'approssimazione locale di f in x_0 nel senso precisato all'inizio: sottolineiamo che n è fissato e stiamo studiando il limite di $\epsilon_n(x)$ per $x \rightarrow x_0$.

D'altra parte sappiamo che quanto più alto è n , tanto migliore è l'approssimazione. Alla luce di questa informazione supponiamo f derivabile infinite volte e proviamo a cambiare prospettiva: fissiamo $x \in I$ e studiamo il limite per $n \rightarrow +\infty$.

Ricordando come sono definiti i polinomi p_n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

studiare il limite per $n \rightarrow +\infty$ equivale a studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

In particolare ci chiediamo se la suddetta serie, denominata *serie di Taylor* di centro x_0 , converge alla funzione $f(x)$ che l'ha generata.

La risposta è banalmente affermativa per $x = x_0$; infatti la serie contiene un solo termine diverso da 0. Un'importante teorema afferma che, in ipotesi abbastanza generali, la risposta sarà affermativa in un intervallo di tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Osserviamo esplicitamente che, se consideriamo anche x variabile, la serie di Taylor è una *serie di funzioni*, quindi lo studio della sua convergenza richiede particolari avvertenze.

13.3.3 Esempi di applicazione

I polinomi di Taylor, con l'informazione a noi nota sul resto (Teorema ...), possono essere utilizzati nel calcolo dei limiti come valida alternativa al Teorema di de L'Hospital (si veda ad esempio. il paragrafo 78 del testo di Marcellini e Sbordone).

Nel nostro corso le funzioni elementari sono state introdotte in maniera intuitiva. Anche se ci impegnassimo a fondo in una definizione teorica rigorosa, rimarrebbe il problema di calcolarne esplicitamente i valori: come fanno le nostre calcolatrici da tavolo a scrivere

$$\sin 3 = 0.141\,12?$$

Attraverso le serie di Taylor, il calcolo di $\sin 3$ viene ricondotto ad operazioni algebriche semplici (addizioni e moltiplicazioni); infatti possiamo calcolare il polinomio di McLaurin p_{15} ed otteniamo

$$p_{15}(3) = 0.141\,12$$

La valutazione teorica del resto ci consente di affermare che, nell'ambito delle 5 cifre decimali, il valore approssimato coincide con il valore teorico.