

Capitolo 12

Funzioni derivabili su un intervallo

Abbiamo dato la definizione di funzione derivabile in un punto (nozione puntuale). Ora, analogamente a quanto fatto per la continuità, diamo una definizione di carattere globale.

Definizione 12.1 Una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ si dice derivabile se è derivabile in ogni punto $x \in A$.

12.1 Teorema di Lagrange

Lemma 12.2 (di Rolle) Sia $w : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $w(a) = w(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$.

Dimostrazione. Dobbiamo distinguere due casi.

I caso: w costante

In questo caso non c'è niente da dimostrare, infatti per ogni $x \in [a, b]$ risulta $w'(x) = 0$.

II caso: w non costante

Poiché la funzione w è continua su un intervallo chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass, essa ammette massimo e minimo assoluti, precisamente esistono due punti $c_1, c_2 \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$

$$w(c_1) \leq w(x) \leq w(c_2).$$

Osserviamo che i punti c_1, c_2 sono necessariamente distinti; infatti, se così non fosse, avremmo $w(c_1) = w(c_2)$ e quindi dovremmo concludere che w è costante. Analogamente almeno uno dei due punti c_1, c_2 deve cadere in (a, b) . Infatti da

$$c_1 = a \quad \text{e} \quad c_2 = b$$

(o viceversa) si deduce

$$w(c_1) = w(a) = w(b) = w(c_2)$$

e quindi ancora w costante.

Denotiamo con c il punto di estremo che cade in (a, b) . Al punto c si può applicare il Teorema di Fermat e si conclude che $w'(c) = 0$. ■

Teorema 12.3 (di Lagrange) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Accanto alla funzione f consideriamo una funzione ausiliaria

$$w(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Osserviamo subito che la funzione $w : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile in quanto somma di funzioni derivabili; risulta inoltre

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} w(a) &= f(a), \\ w(b) &= f(a). \end{aligned}$$

Alla funzione w si può applicare il Lemma di Rolle, dunque esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$. Sostituendo nell'espressione di w' che abbiamo calcolato si ottiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ossia la tesi che si voleva dimostrare. ■

Interpretazione grafica del Teorema di Lagrange...

12.1.1 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Come al solito I denota un generico intervallo.

Teorema 12.4 (caratterizzazione delle funzioni costanti) ...

Controesempio

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

Teorema 12.5 (caratterizzazione delle funzioni monotone) *Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile; le seguenti proposizioni sono equivalenti*

- a) f è monotona crescente;
- b) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

L'implicazione **a)** \Rightarrow **b)** sfrutta solo la definizione di derivata ed il Teorema di confronto. Essa continua ad essere valida anche per funzioni definite in un insieme $A \subset \mathbf{R}$ generico.

L'implicazione **b)** \Rightarrow **a)** sfrutta il Teorema di Lagrange quindi vale solo su intervalli.

Non sussiste un'altrettanto semplice caratterizzazione delle funzioni strettamente monotone.

Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile e consideriamo le seguenti proposizioni:

a₁) f è strettamente monotona crescente;

b₁) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$.

L'implicazione **b₁)** \Rightarrow **a₁)** è vera e si prova come sopra.

L'implicazione **a₁)** \Rightarrow **b₁)** è falsa. Si consideri infatti la funzione strettamente crescente $f(x) = x^3$; evidentemente è falso che $f'(x) = 3x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

12.2 Risoluzione qualitativa di equazioni

Nel capitolo sulle funzioni continue abbiamo impostato la risoluzione qualitativa di equazioni. Abbiamo enunciato il Corollario ... che consentiva di trarre una importante conclusione: il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0$$

è minore o al più uguale al numero di sottointervalli del dominio in cui f è strettamente monotona; precisamente in ciascun sottointervallo di stretta monotonia la soluzione esiste se e solo se f cambia segno agli estremi; ovviamente può anche capitare che f si annulli proprio ad un estremo di un intervallo di stretta monotonia.

Ora, finalmente, abbiamo il Teorema ... che ci consente di determinare gli intervalli di stretta monotonia, quindi possiamo determinare il numero esatto di soluzioni di f , a patto di riuscire a studiare il segno di $f'(x)$.

Esempio 12.6 *Si consideri l'equazione*

$$4x^7 - 7x^4 + 2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica, ma non sembra possibile individuarne le radici con i tradizionali metodi algebrici.

Se applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 2$$

osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

pertanto vi è almeno uno zero.

Se calcoliamo $f(0) = 2$, possiamo concludere che una soluzione è collocata in $(-\infty, 0]$.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = 28x^3(x^3 - 1).$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- In $(-\infty, 0]$ la funzione f cresce, da $-\infty$ a $f(0) = 2$; dunque in questo intervallo abbiamo una soluzione (esattamente una!).
- In $[0, 1]$ la funzione decresce e cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.
- Infine in $[1, +\infty)$ la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una terza soluzione.

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente tre soluzioni.

In maniera del tutto analoga (e sempre utilizzando il calcolo differenziale), potremmo dimostrare che l'equazione

$$4x^7 - 7x^4 + 3 = 0$$

ammette esattamente due soluzioni.

Esempio 12.7 Si consideri l'equazione

$$xe^x = 5000(x+1)^2$$

Potremmo provare a visualizzare i grafici dei due termini xe^x e $5000(x+1)^2$ con un software: in $[-5, 5]$ (intervallo standard di visualizzazione) non avremmo alcuna intersezione.

Se applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = xe^x - 5000(x+1)^2,$$

poiché risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty,\end{aligned}$$

possiamo concludere che esiste almeno uno zero.

Se calcoliamo $f(0) = -5000$, possiamo concludere che una soluzione è collocata nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = (x+1)(e^x - 10000)$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- In $(-\infty, -1]$ la funzione f cresce, da $-\infty$ a $f(-1) = -1/e$; dunque in questo intervallo non vi sono soluzioni.
- In $[-1, 4 \log 10]$ la funzione decresce, rimanendo ovviamente negativa; dunque non vi sono soluzioni. In particolare $f(4 \log 10) < f(-1) < 0$.
- Infine in $[4 \log 10, +\infty)$ la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una soluzione.

In definitiva l'equazione assegnata ammette un'unica soluzione.

Esempio 12.8 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{1}{6}x^3 = \log x^4.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$. Pertanto applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \log x^4$$

in due distinti intervalli: $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi esiste almeno una soluzione in $(-\infty, 0)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi in $(0, +\infty)$ non abbiamo informazioni utili.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In $(-\infty, 0)$ la funzione f cresce, da $-\infty$ a $+\infty$; dunque in questo intervallo abbiamo esattamente una soluzione.*
- *In $(0, 2)$ la funzione decresce da $+\infty$ a $f(2) = \frac{4}{3}(1 - \log 8) < 0$, cioè cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.*
- *Infine in $[2, +\infty)$ la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una terza soluzione.*

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente tre soluzioni.

Esempio 12.9 *Si consideri l'equazione*

$$\log(x^2 + \frac{1}{4}) = 2 \arctan(2x).$$

Applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = \log(x^2 + \frac{1}{4}) - 2 \arctan(2x).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi non ricaviamo alcuna informazione utile. In realtà se calcoliamo $f(0) = -\log 4$, possiamo concludere che esistono almeno due soluzioni, una positiva ed una negativa.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{4}{4x^2 + 1}(2x - 1)$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- In $(-\infty, 1/2]$ la funzione f decresce, da $+\infty$ a $f(1/2) < f(0) < 0$; dunque in questo intervallo abbiamo esattamente una soluzione.
- In $[1/2, +\infty)$ la funzione f cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente due soluzioni.

Esempio 12.10 Si consideri l'equazione

$$x^2 + 8x + 4 = 20 \arctan x.$$

Applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = x^2 + 8x + 4 - 20 \arctan x.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi non ricaviamo alcuna informazione utile. Anche se calcoliamo $f(0) = 4$, non ricaviamo alcuna informazione utile.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}(x + 3)(x + 2)(x - 1)$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- In $(-\infty, -3]$ la funzione f decresce, da $+\infty$ a $f(-3) > 0$; dunque in questo intervallo esistono soluzioni.

- In $[-3, -2]$ la funzione cresce e ovviamente non cambia segno agli estremi; dunque anche in questo intervallo non esistono soluzioni.
- In $[-2, 1]$ la funzione decresce e cambia segno agli estremi; quindi abbiamo una soluzione. Alla luce di quanto osservato in precedenza, possiamo anche precisare che la soluzione è contenuta in $[0, 1]$.
- Infine in $[1, +\infty)$ la funzione cresce e cambia segno agli estremi, quindi abbiamo un'altra soluzione.

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente due soluzioni.

Esempio 12.11 Si consideri l'equazione

$$4x^3 - 5x^2 = \log x^2.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$. Pertanto applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - \log x^2$$

in due intervalli distinti: $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi esiste almeno una soluzione in $(-\infty, 0)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi in $(0, +\infty)$ non abbiamo informazioni utili.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = 2 \frac{(x-1)(6x^2 + x + 1)}{x}$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- In $(-\infty, 0)$ la funzione f cresce, da $-\infty$ a $+\infty$; dunque in questo intervallo abbiamo esattamente una soluzione.
- In $(0, 1]$ la funzione decresce da $+\infty$ a $f(1) = -3$, cioè cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.
- Infine in $[1, +\infty)$ la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una terza soluzione.

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente tre soluzioni.

12.3 Teoremi di de L'Hospital

12.3.1 Alcune avvertenze

La regola di de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (8.1)$$

se applicata a forme determinate, può portare completamente fuori strada.

Esempio 12.12 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{\sin^2 x}$$

Quando scriviamo la (8.1) dobbiamo ricordare che si tratta di una uguaglianza condizionata (essa è vera se il secondo limite esiste); quindi anche se il secondo limite non esiste, il primo può esistere.

Esempio 12.13 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x}$$

In quali casi si applica la regola di de L'Hospital?

Tutte le volte in cui non si riescono ad applicare le equivalenze, in particolare nelle situazioni di cancellazione. In ogni caso dobbiamo suggerire di applicare tutte le possibili equivalenze per semplificare al massimo il limite da calcolare.

Talvolta anche il rapporto delle derivate si presenta come forma indeterminata. In alcuni casi ci accorgiamo subito che si ottiene un limite in qualche senso più complicato di quello iniziale. Ciò vuol dire che la regola, anche se applicata correttamente, ci ha portati fuori strada; quindi si deve cambiare metodo.

Esempio 12.14 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

Possiamo anche pensare ad un'applicazione ripetuta della regola, stando bene attenti ad alcune situazioni paradossali.

Esempio 12.15 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\sqrt{1 - \sin x}}$$

Esempio 12.16 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$$