

Capitolo 11

Calcolo differenziale

11.1 Derivata

Siano assegnati $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Definizione 11.1 Sia $[a, b] \subset A$; si definisce rapporto incrementale medio di f in $[a, b]$ il numero reale

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il rapporto incrementale medio coincide con il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Derivata e derivabilità

Esempi di calcolo: funzione costante, funzione lineare, potenza n -sima

Derivata destra e sinistra

La derivata esiste se e solo se coincidono derivata destra e sinistra.

La derivabilità implica la continuità.

Controesempio: $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non derivabile; la continuità si dimostra ricordando che $x_n \rightarrow 0$ se e solo se $|x_n| \rightarrow 0$.

11.2 Interpretazioni geometriche

11.2.1 Monotonia rispetto ad un punto

La derivata $f'(x_0)$ fornisce un'indicazione sull'andamento (monotonia) di f in un intorno di x_0 .

Proposizione 11.2 Siano $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ con $f'(x_0) > 0$ (eventualmente uguale a $+\infty$). Allora esiste I intorno di x_0 tale che per ogni $x \in A \cap I$,

- se $x < x_0$, allora $f(x) < f(x_0)$;
- se $x_0 < x$, allora $f(x_0) < f(x)$.

Abbiamo dunque una specie di monotonia rispetto ad un punto prefissato x_0 (mentre la monotonia si ha con due punti arbitrari).

Dimostrazione. è basata sul Teorema di permanenza del segno. ■

La Proposizione ... e la sua analoga per il caso $f'(x_0) < 0$ in un certo senso giustificano la seguente definizione.

Definizione 11.3 *I punti (interni) in cui la derivata prima esiste ed è uguale a 0 si dicono stazionari.*

Infatti, se la derivata (in un punto interno) è uguale a 0,

- non possiamo dedurre che la funzione è crescente in x_0 ,
- non possiamo dedurre che la funzione è decrescente in x_0 ,

come terza possibilità ci resta che la funzione (in un intorno) sia pressoché costante. Ovviamente tutto ciò va precisato e lo faremo quando avremo definito la retta tangente.

Non solo il segno di $f'(x_0)$ è rilevante, ma anche il valore, nel senso che quanto più è grande $f'(x_0)$ tanto più è sensibile la variazione del valore di $f(x)$ rispetto al valore di $f(x_0)$. Questo verrà chiarito nel sottoparagrafo successivo.

11.2.2 Trasmissione dell'errore e differenziale

Supponiamo di voler calcolare il valore $y_0 = f(x_0)$. In molte situazioni concrete non si conosce esattamente x_0 ma solo una sua approssimazione x_1 con un errore (assoluto)

$$\Delta_x = x_1 - x_0.$$

Quando svolgiamo i calcoli utilizziamo x_1 e quindi non otterremo il valore teorico $y_0 = f(x_0)$, ma un valore approssimato $f(x_1)$ con un errore

$$\Delta_{f(x)} = f(x_1) - f(x_0)$$

Una questione di notevole interesse è la trasmissione dell'errore in questo passaggio (x input, y output).

Osserviamo che

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\Delta_{f(x)}}{\Delta_x} = f'(x_0),$$

da cui consegue

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\Delta_{f(x)} - f'(x_0)\Delta_x}{\Delta_x} = 0,$$

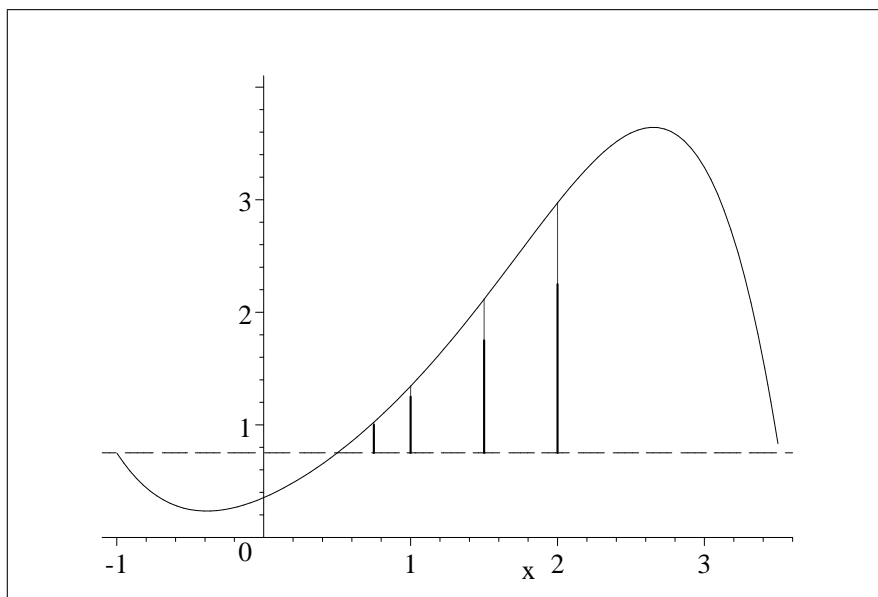
ossia $\Delta_{f(x)} - f'(x_0)\Delta_x$ è trascurabile rispetto a Δ_x .

Dunque possiamo scrivere $\Delta_{f(x)}$ come somma di due termini

$$\Delta_{f(x)} = f'(x_0)\Delta_x + (\Delta_{f(x)} - f'(x_0)\Delta_x)$$

dove il secondo termine è trascurabile (rispetto a $\Delta_x \rightarrow 0$).

Tutto questo è evidente nel disegno che segue. L'incremento $\Delta_{f(x)}$ corrisponde al segmento verticale compreso tra la retta orizzontale ed il grafico. Tale segmento è stato scomposto in due parti, che corrispondono ai due addendi di cui sopra. La parte trascurabile è evidentemente quella sottile: man mano che x_1 si avvicina ad x_0 possiamo osservare che essa tende a scomparire.



La quantità $f'(x_0)\Delta x$ prende il nome di *differenziale* di f in x_0 , valutato in Δx . In generale il differenziale è lineare rispetto a Δx e, se $f'(x_0) \neq 0$, rappresenta la cosiddetta *parte principale* dell'incremento $\Delta_{f(x)}$.

Se identifichiamo l'incremento con il differenziale (ossia in (...) eliminiamo il termine trascurabile), otteniamo la seguente relazione (vera in senso approssimato)

$$\Delta_{f(x)} = f'(x_0) \Delta x$$

Dunque la derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente di trasmissione dell'errore (assoluto) attraverso la funzione f nei pressi del punto x_0 .

Esempio 11.4 Abbiamo $x_0 = \pi$ e vogliamo calcolare $y_0 = \pi^2$. Possiamo approssimare per arrotondamento π con 3.142; l'errore di arrotondamento è

$$3.142 - \pi.$$

L'errore prodotto nelle procedure di arrotondamento viene stimato in maniera precisa; nel nostro caso risulta

$$|\epsilon_x| = |3.142 - \pi| < 1/2000.$$

Se calcoliamo

$$3.142^2 = 9.872164,$$

ci chiediamo quanto questo valore sia distante dal valore teorico π^2 .

Possiamo applicare la formula (...). La funzione in questione è $f(x) = x^2$ e quindi

$$f'(x_0) = 2x_0 = 2\pi = 6.284$$

dove, ovviamente, l'ultima uguaglianza è solo approssimata. Pertanto

$$|\epsilon_y| = |f'(x_0) \epsilon_x| < 6.284/2000 = 3/1000$$

Dunque il valore 9.872164 rispetto al valore teorico contiene un errore minore di 3/1000.

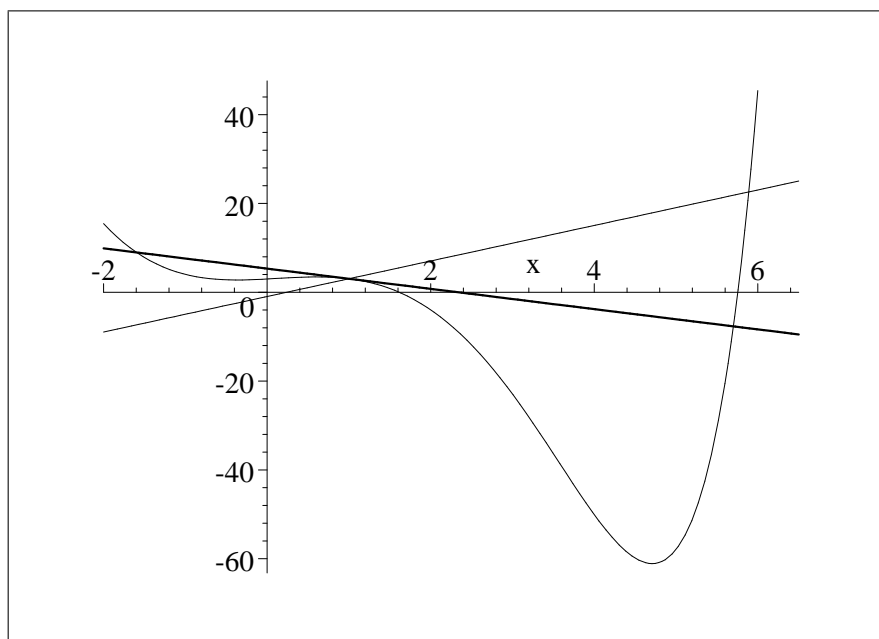
11.2.3 Retta tangente

Generalmente, quando si vuole introdurre il calcolo differenziale si dice di voler calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico $y = f(x)$ di una funzione reale di variabile reale. Quindi si dà per nota la nozione di retta tangente. Ricordiamo che, se γ è una conica (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole) ed r è una retta, si dice che r è tangente a γ se l'intersezione $\gamma \cap r$ è ridotta ad un sol punto. Se $P \in \gamma$, esiste una sola retta r passante per P e tangente a γ .

In realtà, quando passiamo ad una curva generica, la nozione di retta tangente perde in evidenza, in quanto non appare più vincolata al numero complessivo di intersezioni. Nella figura che segue abbiamo tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = e^x - \frac{5}{3}x^3 + 2$$

e due rette passanti per il punto $(1, f(1))$: una retta ha *tre* intersezioni con il grafico, l'altra retta ne ha solo *due*. Ciononostante non avremmo dubbi nel considerare la retta tracciata più spesso (quella con un'intersezione in più) tangente al grafico nel punto $(1, f(1))$.



Siano assegnati $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$; sia f derivabile in $x_0 \in A$. Tra le infinite rette passanti per il punto $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

vogliamo definire la retta tangente al grafico della funzione.

Definizione 11.5 Si definisce retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Quindi per definizione abbiamo assunto che la retta tangente al grafico abbia per coefficiente angolare la derivata di f calcolata in x_0 .

Esercizio 11.6 *Si consideri una semplice conica rappresentabile come grafico di funzione, ad esempio la parabola*

$$y = ax^2 + bx + c = f(x).$$

Fissiamo un punto (x_0, y_0) sulla parabola stessa ed in quel punto calcoliamo la retta tangente secondo la tecnica elementare sviluppata in geometria analitica: tra le rette

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

selezioniamo quella avente una sola intersezione con la parabola. Otterremo

$$m = 2ax_0 + b = f'(x_0).$$

Dunque la nostra definizione di retta tangente è coerente con la definizione della geometria elementare.

Osservazione 11.7 *Rimane da precisare la definizione di retta tangente per curve che non siano coniche e che non siano grafici di funzioni.*

La retta tangente rappresenta una buona approssimazione della funzione nei pressi del punto x_0 , nel senso che la differenza tra la funzione e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ valutata in x è trascurabile rispetto alla differenza $x - x_0$. Infatti posto

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

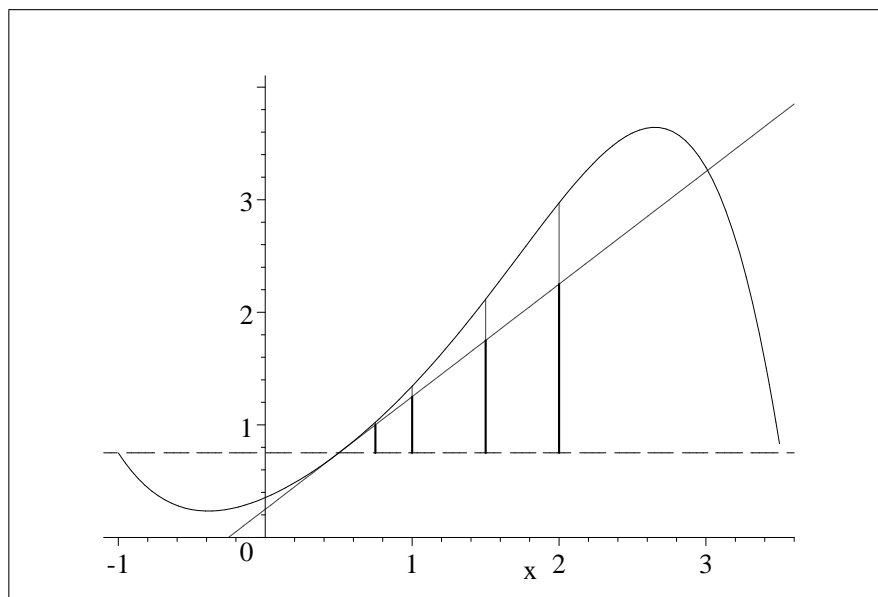
risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dunque per punti sufficientemente vicini ad x_0 potremo approssimare il valore della funzione $f(x)$ con il valore della funzione $p_1(x)$.

Osservazione 11.8 *Osserviamo che se $f'(x_0) = 0$ la retta tangente rappresenta il grafico di una funzione costante. Dunque quando dicevamo sopra che nei pressi di un punto stazionario la funzione è pressoché costante era perché stavamo approssimando la funzione con la sua retta tangente.*

Se nella figura precedente aggiungiamo la retta tangente comprendiamo anche l'interpretazione geometrica del differenziale.



Dunque il differenziale è l'incremento valutato sulla retta tangente.

11.2.4 Punti singolari

Siano $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ punto interno.

Punti di flesso a tangente verticale

Esempio: $y = \sqrt[3]{x}$

Punti angolosi

Esempio: $y = |x|$

Punti cuspidali

Esempio: $y = \sqrt[3]{x^2}$

11.3 Algebra delle derivate

...

11.4 Punti di estremo relativo

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Definizione 11.9 Il punto $x_0 \in A$ si dice di minimo (risp. massimo) relativo se esiste I intorno di x_0 tale che per ogni $x \in A \cap I$ risulta

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq f(x) \\ (\text{risp. } f(x) &\leq f(x_0)). \end{aligned}$$

Evidentemente tutti i punti di estremo assoluto sono anche di estremo relativo, ma non è vero il viceversa.

Teorema 11.10 (di Fermat) *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Se x_0 è un punto interno ad A , x_0 è punto di estremo relativo ed f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione nel caso in cui x_0 è punto di minimo.

Poiché x_0 è punto interno, risulta quanto segue: esiste $\epsilon_1 > 0$ tale che, per ogni $x \in [x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_1]$ si ha

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Per ipotesi esiste la derivata in x_0 . Si presentano allora tre possibili casi

- $f'(x_0) > 0$;
- $f'(x_0) < 0$;
- $f'(x_0) = 0$.

Vedremo che i primi due casi vanno in contraddizione con (...), quindi necessariamente avremo $f'(x_0) = 0$.

Per assurdo consideriamo $f'(x_0) > 0$ e quindi applichiamo la Proposizione ... Dunque esiste $\epsilon_2 > 0$ tale che

Posto $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, per ogni $x \in [x_0 - \epsilon, x_0]$, otteniamo la contraddizione

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq f(x), \\ f(x) &< f(x_0). \end{aligned}$$

Analogamente si esclude $f'(x_0) < 0$. ■

Talvolta si dice in breve che i punti di estremo locale sono stazionari; rispetto a questa affermazione generica abbiamo due tipi di controesempi:

- punti di estremo in cui la derivata non esiste $f(x) = |x|$;
- punti di estremo in cui la derivata non è nulla $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ con $f(x) = x$.

Osservazione 11.11 *Dell'implicazione contenuta nel Teorema di Fermat non è vero il viceversa: esistono punti stazionari non di estremo. Ad esempio il punto $x_0 = 0$ è stazionario per la funzione $f(x) = x^3$ e tuttavia non è di estremo.*

In seguito vedremo che esistono condizioni sufficienti a garantire che un punto sia di minimo. Purtroppo non esistono condizioni necessarie e sufficienti.