

Capitolo 10

Serie numeriche

Il problema di sommare infiniti addendi è uno dei problemi classici dell'analisi matematica. Anzi si tratta di un problema che nell'antichità ha avuto anche implicazioni filosofiche (paradosso di Zenone).

Da una parte dovrebbe essere intuibile che un qualsiasi numero può essere “immaginato” come risultato di una “somma di infiniti addendi”. Ad esempio

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Quindi, con un piccolo salto logico

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

D'altra parte rimane aperto il problema di formalizzare questa situazione partendo da una successione $\{a_n\}$ generica.

10.1 Generalità

Assegnata $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$, per ricorrenza si definisce la successione $\{s_n\}$

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$$

denominata *successione delle somme parziali di $\{a_n\}$* .

Se vogliamo passare ad una forma esplicita abbiamo

$$\begin{aligned}s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n\end{aligned}$$

La locuzione “*serie di termine generale a_n* ”, a cui associamo il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad (10.1)$$

va intesa come abbreviazione (o sinonimo) di “successione delle somme parziali di $\{a_n\}$ ”. Quindi tutto quello che si riferisce alla serie (10.1) in realtà si riferisce alla successione $\{s_n\}$.

Vediamo tutto questo nella definizione che segue.

Definizione 10.1 *Studiare la serie (10.1) vuol dire studiare la successione $\{s_n\}$.*

Si dice che la serie (10.1) converge ad $S \in \mathbf{R}$ se la successione $\{s_n\}$ converge ad S . In tal caso si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

Il numero S si dice anche somma della serie.

Analogamente si dice che la serie (10.1) diverge (posit. o negat.) se la successione $\{s_n\}$ diverge (posit. o negat.). In tal caso si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty$$

Infine si dice che la serie (10.1) non è regolare se tale risulta la successione $\{s_n\}$.

Come nelle somme finite, l'indice di sommazione non è rilevante e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Dobbiamo mettere in evidenza una piccola difficoltà generata dal linguaggio comune:

- in matematica una successione è un insieme di oggetti ciascuno contraddistinto da un indice, una serie è la “somma” degli infiniti termini di una preassegnata successione;
- nel linguaggio comune il termine “serie” viene riferito a oggetti, o eventi, ripetuti esattamente identici (produzione in serie), oppure ripetuti non identici ma con certe analogie (i delitti di un serial killer), oppure diversi ma in un qualche senso concatenati (gli episodi di una serie televisiva).

Quindi nel linguaggio comune il termine serie ha la stessa accezione di ciò quello che in matematica chiameremmo successione.

10.1.1 Primi esempi: calcolo di somme

Gli esempi più semplici di serie numeriche si presentano quando è possibile dare un'espressione analitica per la successione $\{s_n\}$ e quindi calcolarne il limite. Precisiamo che si tratta di situazioni estremamente rare.

Serie geometrica

Alla progressione geometrica $\{q^n\}$ si associa la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n. \quad (10.2)$$

Si dimostra (con il principio di induzione) che

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{se } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

Quindi risulta quanto segue:

- se $|q| < 1$, allora la serie (10.2) converge e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_n s_n = \frac{1}{1-q};$$

- se $q \geq 1$, allora la serie (10.2) diverge positivamente;
- se $q \leq -1$, allora la serie (10.2) non è regolare.

Osserviamo che, nel caso $|q| < 1$, risulta

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}. \quad (10.3)$$

Serie telescopiche

Esempio 10.2 *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

e passiamo a calcolare le somme parziali. Con pochi tentativi ed un pizzico di intuizione si riconosce che, per ogni $n \geq 4$

$$s_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \quad (10.4)$$

In realtà la dimostrazione rigorosa di (10.4) si avrebbe con il principio di induzione. Passando al limite, concludiamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_n s_n = \frac{3}{4}.$$

Esempio 10.3 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Osserviamo che

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log(n+1) - \log n$$

da cui si deduce, per ogni $n \geq 2$

$$s_n = \log(n+1).$$

Pertanto, passando al limite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_n s_n = +\infty.$$

10.1.2 Teoremi sulle serie convergenti

Ove non sia possibile dare un'espressione analitica di $\{s_n\}$ o calcolarne il limite, ci si accontenta di stabilire il carattere della serie (convergente, divergente, non regolare).

A questo scopo si utilizzano vari criteri che esporremo nei prossimi paragrafi. Per il momento possiamo enunciare alcune utili proposizioni, anzitutto una condizione necessaria per la convergenza.

Proposizione 10.4 (condizione necessaria per la convergenza) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora risulta $\lim_n a_n = 0$.

Osservazione 10.5 Non è vero il viceversa. Un controesempio è dato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \tag{10.5}$$

Infatti, anche se risulta

$$\lim_n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0,$$

abbiamo visto nell'Esempio 10.3 che la serie (10.5) è divergente.

Un altro classico controesempio è dato dalla serie armonica che studieremo in seguito (Esempio 10.20).

Proposizione 10.6 Se le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \tag{10.6}$$

sono convergenti, anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \quad (10.7)$$

è convergente e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Se le serie (10.6) sono divergenti con lo stesso segno, anche la serie (10.7) è divergente.

Se una delle due serie (10.6) è divergente e l'altra è convergente, allora la serie (10.7) è divergente.

Proposizione 10.7 Sia $\lambda \neq 0$. Le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n)$$

hanno lo stesso comportamento. In particolare, se convergono, risulta anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Passiamo ora a considerare una situazione che possiamo definire di *somma per incastro*. Accanto alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (10.8)$$

consideriamo le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}. \quad (10.9)$$

Il teorema che segue è formalmente identico al teorema relativo alla serie somma.

Proposizione 10.8 Se le serie (10.9) sono convergenti, anche la serie (10.8) è convergente e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}.$$

Se le serie (10.9) sono divergenti con lo stesso segno, anche la serie (10.8) è divergente.

Se una delle due serie (10.9) è divergente e l'altra è convergente, allora la serie (10.8) è divergente.

Vedremo in seguito (nell'Esempio 10.42) che, se le serie (10.9) divergono con segno opposto, non è escluso che (10.8) sia convergente.

10.1.3 Somme approssimate

Sia assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \quad (10.10)$$

Supponiamo di aver stabilito che (10.10) è convergente, ma di non essere in grado di calcolarne la somma S . Poiché la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è convergente ad S , possiamo considerare ciascuna s_n come approssimazione di S .

Tuttavia ogni approssimazione che si rispetti deve essere accompagnata da una stima dell'errore commesso, che è dato da $|S - s_n|$. Quindi è utile stabilire una qualche maggiorazione per $|S - s_n|$.

Per procedere può fare comodo introdurre una definizione.

Definizione 10.9 *Si definisce resto n -simo la differenza*

$$\begin{aligned} r_n &= S - s_n \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Il problema di maggiorare l'errore $|r_n|$ ha una ricaduta di tipo algoritmico come criterio di arresto nel calcolo della somma: fissata una soglia $\epsilon > 0$ (ad esempio $\epsilon = 1/1000$) si vuole determinare $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$|S - s_n| < \epsilon. \quad (10.12)$$

Poiché S è incognita non ha senso chiedere di risolvere (10.12) rispetto ad n . Tuttavia, se si riesce a scrivere una maggiorazione

$$|r_n| \leq R_n,$$

per ottenere la (10.12) sarà sufficiente risolvere

$$R_n < \epsilon.$$

Osservazione 10.10 *Attraverso diversi esempi avremo modo di vedere che, a parità di $\epsilon > 0$, il valore dell'indice n_0 per cui risulta*

$$|S - s_{n_0}| < \epsilon$$

è estremamente variabile:

- se tale n_0 è piccolo vuol dire che l'errore diventa subito piccolo (la serie converge velocemente);
- se tale n_0 è grande vuol dire che la serie converge lentamente.

A questo proposito vediamo ora un esempio che sarà utile per il seguito.

Esempio 10.11 *Si consideri la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

con $|q| < 1$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sappiamo (vedi (10.3)) che

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

e quindi

$$|r_n| = \frac{|q|^{n+1}}{1-q}.$$

Ovviamente in questo caso non ci interessa l'approssimazione della somma, tuttavia possiamo osservare diverse velocità di convergenza, al variare della base. Ci chiediamo per quale n_0 risulta

$$|r_{n_0}| < 1/1000$$

Dunque dobbiamo risolvere

$$\frac{|q|^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1000}$$

- se $q = -1/2$ dobbiamo risolvere

$$\frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} < \frac{1}{1000}$$

e si ottiene $n \geq 9$;

- se $q = 3/4$ dobbiamo risolvere

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} < \frac{1}{1000}$$

e si ottiene $n \geq 28$.

La nozione di resto si può dare per una serie generica.

Definizione 10.12 *Assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si definisce (serie) resto n -simo la serie*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Osservazione 10.13 *E' immediato verificare che le serie resto hanno lo stesso carattere della serie di partenza.*

Se la serie è convergente abbiamo $r_n \in \mathbf{R}$, inoltre da (10.11) si deduce

$$\lim_n r_n = 0.$$

10.2 Serie a termini positivi

Definizione 10.14 Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a termini positivi se (almeno definitivamente) risulta $a_n \geq 0$.

La proprietà principale è espressa di seguito.

Proposizione 10.15 Ogni serie a termini positivi è regolare, precisamente o converge o diverge positivamente.

Se la serie converge ad S , abbiamo

$$s_n \leq S$$

e quindi i resti r_n sono positivi.

Dimostrazione. ... ■

Corollario 10.16 Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se la successione $\{a_n\}$ non converge a 0, allora la serie è divergente.

Per le serie a termini positivi si può dimostrare che vale il viceversa della Proposizione 10.8 sulla somma per incastro.

Corollario 10.17 Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Tale serie è convergente se e solo se entrambe le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ sono convergenti.

Osservazione 10.18 Se abbiamo una serie a termini (definitivamente) negativi, in base alla Proposizione 10.7, essa avrà lo stesso comportamento della serie opposta (a termini positivi). Dunque le proprietà riportate in questo paragrafo, con le opportune modifiche, si riferiscono alle serie a segno (definitivamente) costante.

Passiamo ora ad illustrare i principali criteri di convergenza

Criterio 10.19 (di confronto) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che (definitivamente)

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente.

Infine, se poniamo

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k,$$

risulta (definitivamente)

$$r_n \leq R_n. \quad (10.13)$$

Esempio 10.20 *Studiamo la serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Ricordiamo che nel Capitolo sulle successioni abbiamo visto che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Quindi, applicando i logaritmi ad ambo i membri, si deduce che

$$n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

ossia

$$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Abbiamo già visto nell'Esempio 10.3 che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

è divergente, quindi, per il Criterio del confronto, anche la serie armonica è divergente.

Esempio 10.21 *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan^n n}{n2^n}$$

E' abbastanza facile osservare che, per ogni $n \geq 1$

$$\frac{\arctan^n n}{n2^n} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \quad (10.14)$$

quindi, poichè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

è una serie geometrica con ragione $\pi/4 < 1$, per il Criterio di confronto, si conclude che anche la serie assegnata è convergente.

Ora passiamo a calcolare una somma approssimata, con errore inferiore a $1/1000$. Da (10.14), si deduce

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\arctan^k k}{k2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k = R_n,$$

quindi è sufficiente imporre

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k \leq \frac{1}{1000}.$$

In altri termini, per la (10.3),

$$\frac{1}{1 - \pi/4} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{1000}$$

Risolvendo questa disequazione rispetto ad n otteniamo

$$\frac{\log 4000 - \log(4 - \pi)}{\log 4 - \log \pi} \leq n + 1$$

cioè

$$33.966\,756\,432\,568\,7 \leq n.$$

In conclusione una somma approssimata, entro il margine di errore prefissato, è data da s_{34} .

Prima di enunciare un secondo criterio riportiamo una definizione perfettamente coerente con la teoria svolta a proposito dei limiti di funzioni.

Definizione 10.22 Due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono asintoticamente equivalenti se risulta

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In tal caso si scrive

$$a_n \cong b_n.$$

Criterio 10.23 (di confronto asintotico) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni (definitivamente) strettamente positive ed asintoticamente equivalenti. Allora le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento, ossia una converge (risp. diverge) se e solo se l'altra converge (risp. diverge).

Esempio 10.24 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3}{3^n - 2}$$

Risulta

$$\frac{2^n}{3^n} \leq \frac{2^n + 3}{3^n - 2}$$

quindi anche se sappiamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{10.15}$$

converge, il Criterio di confronto 10.19 non fornisce informazioni significative. Invece, utilizzando le consuete regole di equivalenza, si ha che

$$\begin{aligned} 2^n + 3 &\cong 2^n \\ 3^n - 2 &\cong 3^n \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{2^n + 3}{3^n - 2} \cong \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Dunque la serie assegnata è convergente in quanto, in base al Criterio 10.23, ha lo stesso comportamento della serie (10.15).

Osservazione 10.25 Si abbia una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente. Se risulta $a_n \cong b_n$, possiamo affermare che anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, ma in generale è falso che le due somme coincidano. Pertanto è un errore scrivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Osservazione 10.26 Per applicare i criteri di confronto dobbiamo stabilire a priori che le serie in questione sono a termini positivi, o almeno a segno costante. In realtà osserviamo che se $a_n \cong b_n$, allora le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno (definitivamente) lo stesso segno. Quindi, se stabiliamo un'equivalenza asintotica e conosciamo il segno della seconda successione, non è necessario studiare a priori il segno della successione di partenza.

Esempio 10.27 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log \cos \frac{1}{3^n}.$$

Osserviamo subito che $1/3^n \rightarrow 0$, quindi applichiamo le equivalenze notevoli tra infinitesimi.

Ricordiamo che, per $t \rightarrow 0$, abbiamo

$$\cos t - 1 \rightarrow 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \log \cos t &= \log(1 + \cos t - 1) \cong \cos t - 1 \\ &= -(1 - \cos t) \cong -\frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$\log \cos \frac{1}{3^n} \cong -\frac{1}{2} \frac{1}{9^n}.$$

Dunque la serie assegnata è a termini negativi ed avrà lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{9^n} \right).$$

Per la Proposizione 10.7 quest'ultima serie ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9^n},$$

la quale converge.

10.2.1 Serie armonica generalizzata

I criteri precedenti consentono di ottenere informazioni su una serie assegnata confrontandola con un'altra di cui si conosca il carattere. In generale come serie

di confronto si considerano la serie geometrica, come negli esempi precedenti, e la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \quad (10.16)$$

Proposizione 10.28 *La serie (10.16) converge se e solo se $\alpha > 1$. In tal caso, con il consueto significato dei simboli, risulta anche*

$$r_n < \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}. \quad (10.17)$$

Il caso $\alpha \leq 1$ si deduce dallo studio della serie armonica e dal Criterio di confronto. La dimostrazione della convergenza per $\alpha > 1$ è ottenibile in diversi modi. Noi rimandiamo la dimostrazione alla conclusione del corso, quando utilizzeremo il *Criterio dell'integrale*.

Esempio 10.29 *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos n}{n^3}.$$

E' abbastanza facile osservare che, per ogni $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{1 - \cos n}{n^3} \leq \frac{2}{n^3}.$$

Osserviamo che, a meno del fattore 2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

è una serie armonica generalizzata con esponente 3 quindi convergente; per il Criterio di confronto, si conclude che anche la serie assegnata è convergente.

Nello studio della convergenza sarebbe un grave errore scrivere

$$1 - \cos n \cong n^2/2.$$

Infatti nello studio del carattere di una serie si considera $n \rightarrow +\infty$, mentre l'equivalenza

$$1 - \cos t \cong t^2/2$$

sussiste per $t \rightarrow 0$.

Ora passiamo a calcolare una somma approssimata, con errore inferiore a 1/1000. Quindi, in base alla (10.17), per ottenere

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1 - \cos k}{k^3} < \frac{1}{1000}$$

è sufficiente imporre

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} < \frac{1}{1000}, \quad (10.18)$$

A sua volta per ottenere (10.18), in base alla (10.17), è sufficiente richiedere

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1000}$$

Quindi risolvendo quest'ultima disequazione rispetto ad n otteniamo

$$1000 < n^2$$

cioè

$$31.622\,776\,601\,683\,8 < n.$$

In conclusione una somma approssimata, entro il margine di errore prefissato, è data da s_{32} .

Esempio 10.30 Vogliamo studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1} \sin \frac{1}{n}.$$

Per $n \rightarrow +\infty$ abbiamo $n+1 \cong n$ e quindi $\sqrt{n+1} \cong \sqrt{n}$; inoltre $1/n \rightarrow 0$ e quindi

$$\sin \frac{1}{n} \cong \frac{1}{n}.$$

In definitiva

$$\sqrt{n+1} \sin \frac{1}{n} \cong \sqrt{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Dunque la serie assegnata ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

cioè diverge.

10.2.2 Criteri immediati

Per criteri immediati intendiamo criteri che non richiedano l'individuazione di una serie di confronto.

Criterio 10.31 (del rapporto) Sia assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini strettamente positivi, cioè tale che $a_n > 0$. Esista

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Se $\ell < 1$, allora la serie è convergente.

Se $\ell > 1$, allora la serie è divergente.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul confronto con la serie geometrica. ■

Osservazione 10.32 Qualora il limite del rapporto sia uguale ad 1 il criterio non fornisce informazioni. Infatti per la serie armonica generalizzata il limite del rapporto è sempre 1, indipendentemente dal fatto che la serie converga o diverga.

Esempio 10.33 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n/2}}{2^n}.$$

Si tratta di una serie a termini strettamente positivi ed applichiamo il Criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^{n/2}} = \\ &= \lim_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_n \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \sqrt{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{e(+\infty)} = +\infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie assegnata è divergente.

Tipico l'uso del Criterio del rapporto nelle serie che coinvolgono i fattoriali (vedi Esempio 10.56).

Criterio 10.34 (degli infinitesimi) Sia assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini positivi.

Se $\lim_n n a_n = \ell > 0$, allora la serie è divergente.

Se esiste $\alpha > 1$ tale che $\lim_n n^\alpha a_n = \ell < +\infty$, allora la serie è convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul confronto con la serie armonica generalizzata. ■

A vantaggio del lettore enunciamo come corollario un caso particolare.

Corollario 10.35 Sia assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini positivi. Se

$$\lim_n n^2 a_n = \ell < +\infty,$$

allora la serie è convergente.

Esempio 10.36 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\sqrt[3]{n} + 2)}{n+3}.$$

Esempio 10.37 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(1+n^2)}{n^3}.$$

Un altro esempio di applicazione del Criterio degli infinitesimi è riportato di seguito.

Esempio 10.38 *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3 \log n}}.$$

Calcoliamo anzitutto

$$\begin{aligned} \lim_n n a_n &= \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 3 \log n}} = \\ &= \lim_n \frac{1}{\sqrt{n} \log n} = 0. \end{aligned}$$

Quindi non possiamo trarre alcuna conclusione.

Come suggerito dal Corollario 10.35 calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_n n^2 a_n &= \lim_n \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 3 \log n}} = \\ &= \lim_n \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi non possiamo trarre ancora alcuna conclusione.

Dobbiamo calibrare la scelta dell'esponente; calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \lim_n n^{3/2} a_n &= \lim_n \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3 + 3 \log n}} = \\ &= \lim_n \frac{1}{\log n} = 0. \end{aligned}$$

Quindi si conclude che la serie assegnata converge.

Saremmo pervenuti alla stessa conclusione scegliendo un qualsiasi $\alpha \in (1, 3/2]$.

A questi due criteri immediati dobbiamo aggiungere il Criterio dell'integrale, che potremo enunciare solo alla fine del corso.

Va segnalato che questi tre criteri hanno un diverso grado di efficienza. In generale

- il Criterio degli infinitesimi consente di studiare alcune serie che sfuggono al Criterio del rapporto;
- il Criterio dell'integrale consentirà di affrontare alcune serie che sfuggono al Criterio degli infinitesimi.

A conclusione del paragrafo riportiamo un paio di esempi riepilogativi, in cui si mostra che la scelta di un approccio al posto un altro può essere talvolta solo un fatto di gusti.

Esempio 10.39 *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \tan \frac{1}{5^n}$$

In tutti gli approcci dovremo tener presente che

$$\frac{1}{5^n} \rightarrow 0$$

e quindi

$$\tan \frac{1}{5^n} \cong \frac{1}{5^n}.$$

Metodo 1. Applichiamo il Corollario 10.35

$$\lim_n n^2 \cdot n^2 \tan \frac{1}{5^n} = \lim_n \frac{n^4}{5^n} = 0$$

(ricordiamo che si tratta di un limite notevole). Dunque la serie converge.

Metodo 2. Applichiamo il Criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{(n+1)^2 \tan \frac{1}{5^{n+1}}}{n^2 \tan \frac{1}{5^n}} &= \lim_n \frac{(n+1)^2 \frac{1}{5^{n+1}}}{n^2 \frac{1}{5^n}} = \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^2 5^n}{n^2 5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1 \end{aligned}$$

dunque la serie converge.

Metodo 3. Osserviamo che

$$n^2 \tan \frac{1}{5^n} \cong \frac{n^2}{5^n},$$

quindi la serie assegnata ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

A questa serie applichiamo il Criterio del rapporto e, come sopra, troviamo che la serie assegnata converge.

Esempio 10.40 Vogliamo studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{n! + 3}$$

Anzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi: il denominatore è positivo, riguardo il numeratore osserviamo che

$$2 \leq \cos n + 3 \leq 4. \quad (10.19)$$

Poiché $n! \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$n! + 3 \cong n!$$

e quindi

$$\frac{\cos n + 3}{n! + 3} \cong \frac{\cos n + 3}{n!}.$$

Pertanto, per il Criterio 10.23 la serie assegnata avrà lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{n!} \quad (10.20)$$

Per studiare la (10.20) abbiamo diverse possibilità. La scelta più ovvia è quella di utilizzare il Criterio di confronto 10.19. Infatti abbiamo

$$\frac{\cos n + 3}{n!} \leq \frac{4}{n!}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n!}$$

converge (Criterio del rapporto), si conclude che anche (10.20) converge.

Volendo potremmo applicare il Criterio del rapporto direttamente alla (10.20). Si deve calcolare il limite

$$\frac{\cos(n+1) + 3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cos n + 3} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cos(n+1) + 3}{\cos n + 3}.$$

Dalla (10.19) si deduce

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\cos(n+1) + 3}{\cos n + 3} \leq 2,$$

e pertanto

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cos(n+1) + 3}{\cos n + 3} = 0.$$

Anche in questo modo si perviene alla conclusione che (10.20) converge.

10.3 Serie a segno non costante

Ora vogliamo studiare le cosiddette serie a segno non (definitivamente) costante, partendo da una situazione abbastanza semplice.

10.3.1 Serie a segno alterno

Occupiamoci di serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \quad \text{con } \alpha_n \geq 0 \text{ (definitivamente)}$$

in cui il termine generale $a_n = (-1)^n \alpha_n$ risulta (definitivamente) a segno alterno.

Sussiste il seguente criterio di convergenza.

Criterio 10.41 (di Leibnitz) Se

a) $\lim_n \alpha_n = 0$;

b) $\{\alpha_n\}$ è strettamente decrescente;

allora la serie () è convergente. Inoltre, denotate con s_n ed S rispettivamente le somme parziali e la somma della serie, si ha

$$|S - s_n| < \alpha_{n+1}.$$

Esempio 10.42 La serie armonica a segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

soddisfa le condizioni del Criterio di Leibnitz quindi è convergente.

Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000$$

ossia

$$\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{1000}$$

da cui ricaviamo

$$998 \leq n.$$

Pertanto s_{998} rappresenta una somma approssimata entro il margine di errore che abbiamo prefissato.

Utilizzando le serie di Taylor (vedi Capitolo ...), si può dimostrare che la somma (esatta) della serie è pari a $\log 2$.

Infine osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \alpha_{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n+1} \alpha_{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2(n+1)} = -\infty \end{aligned}$$

Quindi una serie convergente può essere ottenuta come somma per incastro di due serie divergenti (con segno opposto).

Esempio 10.43 Vogliamo studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2 - 1}.$$

Posto

$$\alpha_n = \frac{n}{2n^2 - 1},$$

è immediato verificare che $\alpha_n \geq 0$ e che

$$\lim_n \alpha_n = 0.$$

Andiamo a studiare la monotonia della successione $\{\alpha_n\}$ applicando direttamente la definizione

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n.$$

Si ottiene la disequazione

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2 - 1} < \frac{n}{2n^2 - 1}$$

che si riduce a

$$0 < 2n^2 + 2n + 1$$

verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dunque la serie converge.

Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000,$$

ossia

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2 - 1} \leq \frac{1}{1000},$$

che si riduce a

$$0 < 2n^2 - 996n + 999.$$

La soluzione è data da

$$496.994959626199 < n$$

Pertanto s_{497} rappresenta una somma approssimata entro il margine di errore che abbiamo prefissato.

Osservazione 10.44 Osserviamo che le condizioni **a)** e **b)** del Criterio ... sono equivalenti a

a₁) $\lim_n 1/\alpha_n = +\infty$;

b₁) $\{1/\alpha_n\}$ è strettamente crescente.

Esempio 10.45 Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n - 3n}.$$

Abbiamo

$$\alpha_n = \frac{1}{3^n - 3n},$$

e quindi

$$\frac{1}{\alpha_n} = 3^n - 3n.$$

La condizione **a₁)** è verificata, infatti

$$\lim_n (3^n - 3n) = \lim_n 3^n \left(1 - \frac{3n}{3^n}\right) = +\infty.$$

Riguardo **b₁)**, applichiamo la definizione ed osserviamo che

$$3^n - 3n < 3^{n+1} - 3(n+1)$$

si riduce a

$$\frac{3}{2} < 3^n,$$

verificata per ogni $n \geq 1$.

Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000$$

ossia

$$\frac{1}{3^{n+1} - 3(n+1)} \leq 1/1000.$$

Possiamo solo procedere per tentativi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^5 - 3 \cdot 5} &= 4.385\,964\,912\,280\,7 \times 10^{-3}, \\ \frac{1}{3^6 - 3 \cdot 6} &= 1.406\,469\,760\,900\,14 \times 10^{-3}, \\ \frac{1}{3^7 - 3 \cdot 7} &= 4.616\,805\,170\,821\,79 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Osservato che la disuguaglianza () è verificata per $n = 6$, si conclude che una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da s_6 .

Osservazione 10.46 Per verificare la condizioni **b)** (risp. **b₁)**), qualora sia difficile applicare la definizione possiamo studiare la monotonia di una funzione (di variabile reale)

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

tale che $f(n) = \alpha_n$ (risp. $f(n) = 1/\alpha_n$).

Ad esempio se vogliamo studiare la successione

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \arctan^2 n},$$

osserviamo che la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + \arctan^2 x$$

tende a $+\infty$ ed è strettamente crescente.

In altri casi, ad esempio

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}},$$

non è immediato neanche stabilire la monotonia della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$$

associata alla successione e dovremo utilizzare il calcolo differenziale.

Osservazione 10.47 Ovviamente le condizioni **b)** o **b₁)** sono sufficienti in forma definitiva; in tal caso anche la stima dell'errore vale in forma definitiva.

Osservazione 10.48 La condizione **a)** è necessaria per la convergenza. Infatti se () converge, per la Proposizione , si ha $(-1)^n \alpha_n \rightarrow 0$. D'altra parte sappiamo che $(-1)^n \alpha_n \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha_n = |(-1)^n \alpha_n| \rightarrow 0$. Quindi se la condizione **a)** non è verificata, la serie () non converge, dunque o diverge o è irregolare.

Se è verificata la condizione **a)** ma non la condizione **b)**, nulla si può dire a priori sul carattere della serie (). In alcuni casi si riesce a dire qualcosa con la Proposizione sulle somme per incastro o con il Criterio di assoluta convergenza che esporremo nel sottoparagrafo seguente.

Ad esempio la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3 + (-1)^n)^n}$$

è convergente, con somma pari a $2/5$. Invece la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2 + (-1)^n)^n}$$

diverge negativamente.

10.3.2 Assoluta convergenza

Se i segni dei termini a_n sono disposti in modo non ordinato, il principale criterio di convergenza è enunciato di seguito.

Criterio 10.49 *Si abbia una generica serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

è convergente, allora la serie $()$ è convergente e risulta

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Osservazione 10.50 *Non vale il viceversa, nel senso che se converge la serie $()$ non è detto che debba convergere anche la serie $()$; si consideri ad esempio la serie armonica a segno alterno.*

Definizione 10.51 *Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.*

Osservazione 10.52 *Alla luce di questa definizione il Criterio ... può essere enunciato al modo seguente: ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Esempio 10.53 *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + 2 \cos n^2}{1 + 2n^2}.$$

Il segno dei termini della serie non presenta alcuna regolarità, quindi studiamo la serie con il Criterio ... e con opportune maggiorazioni.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + 2 \cos n^2}{1 + 2n^2} \right| &= \frac{|1 + 2 \cos n^2|}{1 + 2n^2} \leq \\ &\leq \frac{1 + 2 |\cos n^2|}{2n^2} \leq \frac{3}{2n^2}. \end{aligned}$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2n^2}$$

è convergente, quindi per confronto la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1 + 2 \cos n^2}{1 + 2n^2} \right|$$

è convergente. Dunque la serie assegnata è (assolutamente) convergente.

Possiamo vedere il rapporto tra convergenza ed assoluta convergenza anche da un altro punto di vista: alcune tra le serie convergenti sono anche assolutamente convergenti. Ciò che rende significativa la Definizione ... è che solo le serie assolutamente convergenti godono di particolari proprietà (ad esempio la proprietà commutativa, opportunamente formulata).

Osservazione 10.54 Ovviamente per le serie a termini positivi la nozione di assoluta convergenza coincide con la convergenza.

Le serie (a segno non costante) convergenti ma non assolutamente convergenti si dicono anche semplicemente convergenti.

Vogliamo sottolineare che la serie () è a termini positivi quindi tutti i criteri visti in precedenza, opportunamente trascritti, diventano criteri di assoluta convergenza. Riportiamo i due criteri immediati.

Proposizione 10.55 Se la serie () è a termini non nulli, cioè $a_n \neq 0$, e risulta

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

allora la medesima serie () è assolutamente convergente.

Esempio 10.56 Al variare di $x \in \mathbf{R}$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Per $x \geq 0$ si tratta di una serie a termini positivi, mentre per $x < 0$ è a segno alternato. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_n \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^n} \right| = \\ &= \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la serie assegnata è assolutamente convergente per ogni valore di x . Si può dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Per questa ragione la serie () prende il nome di serie esponenziale.

Proposizione 10.57 *Se esiste $\alpha > 1$ tale che $\lim_n n^\alpha |a_n| = \ell < +\infty$, allora la serie $()$ è assolutamente convergente.*

Concludiamo con qualche osservazione sulla assoluta convergenza delle serie di tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \quad \text{con } \alpha_n > 0.$$

Anzitutto osserviamo che

$$|(-1)^n \alpha_n| = \alpha_n,$$

quindi risulta segue.

Proposizione 10.58 *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a)** *la serie $()$ è assolutamente convergente;*
- b)** *la serie (a termini positivi) $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ è convergente;*
- c)** *entrambe le serie (a termini positivi) $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ sono convergenti.*

Esempio 10.59 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3 + (-1)^n)^n}$$

*(che non verifica la **b)** del Criterio ..) non solo è convergente ma è anche assolutamente convergente.*

Sussiste infine il seguente risultato.

Proposizione 10.60 *Se esiste*

$$\lim_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

allora la serie $()$ è assolutamente convergente e verifica la stima $()$.

Dimostrazione. Per il Criterio del rapporto applicato alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ e otteniamo che la serie $()$ è assolutamente convergente.

La condizione $()$ implica anche **a)** e **b)** del Criterio di Leibnitz, quindi vale la stima $()$. ■

Esempio 10.61 *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}.$$

Calcoliamo

$$\lim_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^2} = \frac{1}{e} < 1.$$

Dunque, in base alla proposizione precedente, la serie assegnata è assolutamente convergente.

Ora cerchiamo di calcolare una somma approssimata con errore inferiore a $1/1000$. In base alla stima () è sufficiente determinare $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} < \frac{1}{1000}.$$

Purtroppo si può solo procedere per tentativi:

$$\begin{aligned} 10^2/e^{10} &= 4.539\,992\,976\,248\,49 \times 10^{-3} \\ 11^2/e^{11} &= 2.020\,905\,795\,619\,72 \times 10^{-3} \\ 12^2/e^{12} &= 8.847\,665\,788\,792\,62 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Osservato che la disuguaglianza () è verificata per $n = 11$, si conclude che una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da s_{11} .