

Capitolo 9

Tecniche per il calcolo dei limiti

La teoria che svolgiamo in questo capitolo rappresenta una rivisitazione, con un linguaggio più vicino alle applicazioni, della classica tecnica di applicazione dei cosiddetti “limiti notevoli”. Ricordiamo che sotto questo nome tradizionale passano alcune forme indeterminate che coinvolgono le funzioni elementari.

In realtà dovremmo distinguere tra

- limiti notevoli che coinvolgono solo infinitesimi;
- limiti notevoli che coinvolgono anche infiniti.

9.1 Equivalenze asintotiche

Alcune forme indeterminate si possono risolvere con opportune “sostituzioni dentro il limite”: ad uno o più termini che compaiono dentro il limite se ne sostituiscono altrettanti in modo che

1. il valore del limite non cambi;
2. il limite ottenuto dopo la sostituzione sia più facile da studiare.

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A .

Definizione 9.1 *Due funzioni*

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbf{R} \\ g &: A \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

(localmente) non nulle si dicono asintoticamente equivalenti in t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = 1.$$

In questo caso scriveremo

$$g(t) \cong f(t) \quad (\text{per } t \rightarrow t_0).$$

Sottolineiamo che l'equivalenza è una nozione di carattere locale, nel senso che due funzioni equivalenti in un punto non è detto che lo siano in altri punti. La specificazione $t \rightarrow t_0$ verrà omessa tutte le volte che essa risulti chiara dal contesto.

Il risultato principale viene illustrato nel seguente teorema.

Teorema 9.2 *Sia*

$$g(t) \cong f(t) \quad (\text{per } t \rightarrow t_0),$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

In altri termini potremo sostituire la funzione di cui si calcola il limite con un'altra ad essa equivalente.

La dimostrazione è ovvia: è sufficiente moltiplicare e dividere per $f(t)$, quindi sfruttare l'ipotesi di equivalenza.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

Ora sono da stabilire alcune regole di equivalenza.

Proposizione 9.3 *Se, per $t \rightarrow t_0$,*

$$\begin{aligned} g_1(t) &\cong f_1(t) \\ g_2(t) &\cong f_2(t) \end{aligned} \tag{9.1}$$

allora

$$\begin{aligned} (g_1(t))^p &\cong (f_1(t))^p, \\ g_1(t)g_2(t) &\cong f_1(t)f_2(t), \\ \frac{g_2(t)}{g_1(t)} &\cong \frac{f_2(t)}{f_1(t)}. \end{aligned}$$

In breve: l'equivalenza si conserva nell'elevamento a potenza, nei prodotti e nei rapporti. L'equivalenza si conserva anche nella composizione.

Proposizione 9.4 *Supponiamo*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow t_0 && \text{per } x \rightarrow x_0, \\ g(t) &\cong f(t) && \text{per } t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Risulta allora

$$g(\varphi(x)) \cong f(\varphi(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Osservazione 9.5 *Più delicato è il caso della somma. Infatti, anche se vale (9.1), non possiamo affermare che*

$$g_1(t) + g_2(t) \cong f_1(t) + f_2(t).$$

Del resto è evidente che potremmo incontrare la seguente situazione

$$\begin{aligned} g_1(t) &\cong f(t), \\ g_2(t) &\cong -f(t). \end{aligned}$$

Ovviamente non ha senso affermare che

$$g_1(t) + g_2(t) \cong f(t) + (-f(t)) = 0.$$

Infatti per parlare di equivalenza entrambi i termini devono essere diversi da zero.

L'equivalenza nella somma si conserva solo in alcuni casi particolari. La Proposizione seguente riporta i casi di uso più frequente.

Proposizione 9.6 *Supponiamo $t \rightarrow 0$ oppure $t \rightarrow \pm\infty$. Supponiamo*

$$\begin{aligned} f_1(t) &\cong c_1 t^{p_1} \\ f_2(t) &\cong c_2 t^{p_2} \end{aligned}$$

Se

$$c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2} \neq 0$$

allora

$$f_1(t) + f_2(t) \cong c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2}.$$

Questa situazione viene ripresa nella Proposizione 9.15.

9.1.1 Equivalenze notevoli

Ovviamente i teoremi precedenti rimangono privi di utilità fino a quando non si forniscono esempi concreti di funzioni equivalenti.

Teorema 9.7 *Consideriamo $t \rightarrow 0$. Allora risulta*

$$\begin{aligned} e^t - 1 &\cong t \\ \log(1+t) &\cong t \\ \sin t &\cong t \\ 1 - \cos t &\cong \frac{1}{2}t^2 \\ \tan t &\cong t \\ \arcsin t &\cong t \\ \arctan t &\cong t \\ \sqrt[n]{1+t} - 1 &\cong \frac{1}{n}t \end{aligned}$$

Ora possiamo dare alcuni esempi di applicazione.

Esempio 9.8 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Abbiamo solo prodotti e rapporti. Possiamo utilizzare direttamente le equivalenze notevoli

$$\begin{aligned}\sin x &\cong x \\ 1 - \cos x &\cong x^2/2\end{aligned}$$

Quindi il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2/2} = 2.$$

Esempio 9.9 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{(1 - \cos x)^3}.$$

Da

$$\begin{aligned}\sin x &\cong x \\ 1 - \cos x &\cong x^2/2\end{aligned}$$

si ricava rispettivamente

$$\begin{aligned}\sin^2 x &\cong x^2 \\ (1 - \cos x)^3 &\cong x^6/8\end{aligned}$$

Quindi il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^6/8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{x^4} = +\infty.$$

Esempio 9.10 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\log(1 + 3 \sin x)}.$$

Questa volta abbiamo un rapporto di funzioni composte. Sappiamo che

$$\arcsin x \rightarrow 0, \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

quindi da

$$e^t - 1 \cong t, \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

per la Proposizione 9.4

$$e^{\arcsin x} - 1 \cong \arcsin x$$

Inoltre sappiamo che

$$\arcsin x \cong x.$$

Quindi, per transitività dell'equivalenza

$$e^{\arcsin x} - 1 \cong x$$

Analogamente abbiamo

$$\log(1 + 3 \sin x) \cong 3x$$

Pertanto il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 9.11 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{4^{x^2} - 1}.$$

Al numeratore applichiamo un artificio

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log(1 + \cos x - 1) \\ &\cong \cos x - 1 \\ &\cong -\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Al denominatore conviene cambiare base all'esponenziale

$$4^{x^2} = e^{x^2 \log 4}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} 4^{x^2} - 1 &= e^{x^2 \log 4} - 1 \\ &\cong x^2 \log 4 \\ &= 2x^2 \log 2. \end{aligned}$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2 \log 2} = -\frac{1}{4 \log 2}.$$

Esempio 9.12 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{1/x}$$

Trasformiamo

$$(1 + \tan x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \log(1 + \tan x)}.$$

Abbiamo

$$\log(1 + \tan x) \cong \tan x \cong x$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1 + \tan x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Tornando al limite iniziale otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(1 + \tan x)} \\ &= e^1 = e \end{aligned}$$

9.1.2 Cancellazione di addendi

La teoria delle funzioni equivalenti può essere anche utilizzata in uno spirito diverso dalla “sostituzione dentro il limite”. In alcune situazioni si può cancellare un addendo ottenendo una funzione equivalente e quindi conservando il valore del limite.

Proposizione 9.13 *Si abbiano due funzioni f_1 ed f_2 . Se f_2 è (localmente) limitata e*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = \pm\infty$$

allora

$$f_1(t) + f_2(t) \cong f_1(t).$$

Osservazione 9.14 *In altri termini se abbiamo due addendi uno infinito ed uno limitato, quello limitato si può trascurare. Precisiamo che questa regola vale soltanto nel caso di due addendi.*

Proposizione 9.15 *Si considerino due funzioni $c_1 t^{p_1}$ e $c_2 t^{p_2}$ con $p_1 < p_2$.*

Se $t \rightarrow 0^+$, allora $c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2} \cong c_1 t^{p_1}$.

Se $t \rightarrow +\infty$, allora $c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2} \cong c_2 t^{p_2}$.

Osservazione 9.16 *La seconda parte della proposizione precedente ci ricorda una circostanza che dovrebbe essere già nota*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \cong a_n x^n.$$

Esempio 9.17 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x+x^2} \sin^2 \frac{1}{x}$$

Si tratta di una forma indeterminata $(+\infty) \cdot 0$. Occupiamoci del fattore infinitesimo $\sin^2 \frac{1}{x}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 1/x &\rightarrow 0 && \text{per } x \rightarrow +\infty, \\ \sin t &\cong t && \text{per } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pertanto, per la Proposizione 9.4, abbiamo

$$\sin \frac{1}{x} \cong \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Inoltre, poiché l'elevamento a potenza conserva l'equivalenza, si conclude

$$\sin^2 \frac{1}{x} \cong \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

D'altra parte

$$1 + x + x^2 \cong x^2$$

e quindi

$$\sqrt{1+x+x^2} \cong x.$$

In definitiva il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0.$$

Esempio 9.18 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(1 + 3x^2)}{e^{2 \sin x} - \cos x}$$

Si tratta di una forma $0/0$. Il numeratore è equivalente a $3x^3$. Il denominatore richiede maggiore attenzione. Possiamo scrivere

$$e^{2 \sin x} - \cos x = e^{2 \sin x} - 1 + 1 - \cos x.$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} e^{2 \sin x} - 1 &\cong 2x \\ 1 - \cos x &\cong x^2/2 \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi della Proposizione 9.6: poiché

$$2x + x^2/2 \neq 0$$

possiamo affermare che

$$\begin{aligned} e^{2 \sin x} - \cos x &\cong 2x + x^2/2 \\ &\cong 2x. \end{aligned}$$

infatti $x \rightarrow 0$ e possiamo utilizzare la Proposizione 9.15.

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{2x} = 0.$$

9.2 Altri limiti notevoli

Proposizione 9.19 *Per ogni $p > 0$ e per ogni $b > 1$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{b^x} = 0.$$

Osservazione 9.20 *In base a questo limite possiamo affermare che, per $x \rightarrow +\infty$, le potenze sono infiniti di ordine inferiore agli esponenziali (di base $b > 1$).*

Come si è detto altrove, talvolta, nel calcolo dei limiti si fa riferimento ad una non meglio precisata “Teoria degli ordini”. Vogliamo ribadire che noi non abbiamo presentato questa teoria. Al contrario dobbiamo suggerire di utilizzare i limiti notevoli, accompagnati da qualche semplice artificio.

Esempio 9.21 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin 4^x}{2^x - 1}.$$

Si tratta di una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$. In base alla Proposizione 9.13 abbiamo

$$\begin{aligned} x + \sin 4^x &\cong x, \\ 2^x - 1 &\cong 2^x. \end{aligned}$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0.$$

Esempio 9.22 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x^6 + x^3}$$

Si tratta di una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$. Al numeratore abbiamo

$$e^{x^2+1} = e \cdot e^{x^2}$$

Riguardo il denominatore osserviamo che

$$x^6 + x^3 \cong x^6$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$e \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^6}.$$

Se cambiamo variabile $t = x^2 \rightarrow +\infty$, il limite si riduce a

$$e \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty.$$

Esempio 9.23 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5.$$

Si tratta di una forma $(+\infty) \cdot 0$. Anzitutto cerchiamo di semplificare il limite: per $x \rightarrow 0^+$

$$\tan x^5 \cong x^5$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5.$$

Ora possiamo cambiare variabile: $t = 1/\sqrt{x} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{10}} = +\infty.$$

Esempio 9.24 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x+1}} \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

Si tratta di una forma $(+\infty) \cdot 0$. Anzitutto cerchiamo di semplificare il limite: per $x \rightarrow +\infty$

$$1 - \cos \frac{1}{x} \cong \frac{1}{2x^2}$$

Quindi ci siamo ricondotti al limite

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x^2}$$

Come sopra, cambiamo variabile

$$t = \sqrt{x+1} \rightarrow +\infty$$

ed il limite si riduce a

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{(t^2 - 1)^2}$$

D'altra parte sappiamo che per $t \rightarrow +\infty$

$$(t^2 - 1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 \cong t^4$$

Dunque il limite si riduce ulteriormente a

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^4} = +\infty$$

Prima di un esempio più impegnativo enunciamo un ovvio corollario della Proposizione 9.19.

Corollario 9.25 Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$. Per ogni $b > 1$ e per ogni $p > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\varphi(x))^p}{b^{\varphi(x)}} = 0.$$

Esempio 9.26 (più impegnativo) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} \tan x^5.$$

E' ancora una forma $(+\infty) \cdot 0$. Come in un esempio precedente abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} \tan x^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} x^5.$$

In questo caso non possiamo cambiare variabile, pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} x^5 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^p} \left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p x^5 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^p} \frac{x^5}{(x + \sin x)^{p/2}} \end{aligned}$$

Come sopra, il primo fattore è infinito (per ogni $p > 0$), per $p = 10$ il secondo fattore tende ad 1 e quindi, complessivamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^p} \frac{x^5}{(x + \sin x)^{p/2}} = +\infty$$

Proposizione 9.27 Per ogni $p > 0$ e per ogni $b > 0$, $b \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^p} = 0$$

In base a questo limite, per $x \rightarrow +\infty$, i logaritmi sono infiniti di ordine inferiore alle potenze.

Anche le potenze dei logaritmi risultano trascurabili rispetto alle potenze; sussiste infatti il seguente corollario.

Corollario 9.28 Per ogni $p > 0$, per ogni $b > 1$, $b \neq 1$ e per ogni $q > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\log_b x|^q}{x^p} = 0$$

Il valore assoluto è necessario perché q è un esponente reale qualsiasi, quindi la base deve essere positiva.

Esempio 9.29 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/\sqrt{x}}$$

Anzitutto trasformiamo

$$x^{2/\sqrt{x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{x}} \log x}$$

quindi siamo ricondotti a calcolare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} \log x = 0$$

Dunque, tornando al limite assegnato, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{\sqrt{x}} \log x} = \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

L'esempio seguente ci mostra che il riferimento grossolano ad una non meglio precisata teoria degli ordini potrebbe portarci fuori strada; infatti, anche se apparentemente abbiamo il rapporto di un logaritmo e di una potenza, il risultato è infinito.

Esempio 9.30 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{\sqrt{x} + 1}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \log(e^x + 1) &= \log(e^x(1 + e^{-x})) \\ &= \log e^x + \log(1 + e^{-x}) \\ &= x + \log(1 + e^{-x}) \\ &\cong x, \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\sqrt{x} + 1 \cong \sqrt{x},$$

dove in entrambe le equivalenze abbiamo utilizzato la Proposizione 9.13.

Dunque il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Proposizione 9.31 Per ogni $p > 0$ e per ogni $b > 0$, $b \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_b x = 0.$$

Corollario 9.32 Per ogni $p > 0$, per ogni $b > 1$, $b \neq 1$ e per ogni $q > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p |\log_b x|^q = 0.$$

Esempio 9.33 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow} \frac{\log x \arctan x^2}{\sqrt[3]{1+3x} - 1}$$

Esempio 9.34 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+x^3} \log \sin x.$$

Si tratta di una forma $0 \cdot (-\infty)$. Studiamo separatamente i due fattori.

Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$x + x^3 \cong x$$

(vedi Proposizione 9.15) e quindi

$$\sqrt{x+x^3} \cong \sqrt{x}$$

Riguardo il secondo fattore adoperiamo il seguente artificio

$$\log \sin x = \log \left(x \frac{\sin x}{x} \right) = \log x + \log \frac{\sin x}{x} \cong \log x,$$

infatti $\log x \rightarrow -\infty$ mentre $\log \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ (vedi Proposizione 9.13).

Ora possiamo risolvere il limite assegnato

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+x^3} \log \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = 0.$$

Proposizione 9.35 Per ogni $b > 1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x x^n = 0$$

9.3 Differenze di infiniti

Ricordiamo che le forme indeterminate sono quattro

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Quella che sembra sfuggire alle tecniche viste nei paragrafi precedenti è la prima.

Si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

e si voglia studiare la forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = +\infty - \infty$$

Si suggerisce di effettuare la trasformazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right). \quad (9.2)$$

Ci siamo ricondotti a studiare la forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Supponiamo ora di aver risolto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

- Se $\ell \neq 1$, la forma () è determinata e il risultato è infinito (con il segno appropriato).
- Se $\ell = 1$ (infiniti equivalenti), la forma al secondo membro di (9.2) è indeterminata $+\infty \cdot 0$; in questo caso si suggerisce di studiare la natura del termine infinitesimo

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right).$$

Infatti per gli infinitesimi disponiamo di comode equivalenze.

Esempio 9.36 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \log x - 3)$$

Evidentemente, a parte la costante 3, si tratta di una forma $+\infty - \infty$. Possiamo scrivere

$$x - \log x - 3 = x \left(1 - \frac{\log x}{x} - \frac{3}{x} \right)$$

Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

pertanto il termine in parentesi tende ad 1. Dunque si conclude

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\log x}{x} - \frac{3}{x} \right) = +\infty$$

Esempio 9.37 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + \log^4 x} - x \right)$$

Riportiamo la differenza a prodotto come in (9.2)

$$\sqrt[3]{x^3 + \log^4 x} - x = x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\log^4 x}{x^3}} - 1 \right)$$

Il termine in parentesi è infinitesimo in quanto

$$\frac{\log^4 x}{x^3} \rightarrow 0$$

dunque abbiamo ancora una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. D'altra parte dalla Proposizione 9.4 si deduce

$$\sqrt[3]{1 + \frac{\log^4 x}{x^3}} - 1 \cong \frac{1}{3} \frac{\log^4 x}{x^3}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + \log^4 x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\log^4 x}{x^3}} - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \frac{1}{3} \frac{\log^4 x}{x^3} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^4 x}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Esempio 9.38 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{1/x}(x-1) - x \right)$$

Con la trasformazione (9.2) abbiamo

$$e^{1/x}(x-1) - x = x \left(e^{1/x} \frac{x-1}{x} - 1 \right)$$

Il termine tra parentesi è infinitesimo e questa volta non si sembra immediata l'applicazione di equivalenze. Dunque ricorriamo ad un altro artificio

$$e^{1/x}(x-1) - x = x \left(e^{1/x} - 1 \right) - e^{1/x}$$

Poiché $1/x \rightarrow 0$, abbiamo

$$\left(e^{1/x} - 1 \right) \cong \frac{1}{x}$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{1/x} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{x} = 1$$

Pertanto si conclude

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{1/x}(x-1) - x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \left(e^{1/x} - 1 \right) - e^{1/x} \right] \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Esempio 9.39 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(e^x + x) - x]$$

Questa forma indeterminata $+\infty - \infty$ si può risolvere immediatamente; infatti

$$\begin{aligned} \log(e^x + x) - x &= \log(e^x + x) - \log e^x \\ &= \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

e quindi si conclude

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(e^x + x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) = 0.$$

Ovviamente avremmo ottenuto lo stesso risultato utilizzando la trasformazione (9.2)

$$\log(e^x + x) - x = x \left(\frac{\log(e^x + x)}{x} - 1 \right).$$

Infatti osserviamo che

$$\begin{aligned} \log(e^x + x) &= \log \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \right] \\ &= \log e^x + \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \\ &= x + \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\log(e^x + x)}{x} - 1 &= \frac{x + \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)}{x} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \log(e^x + x) - x &= x \left(\frac{\log(e^x + x)}{x} - 1 \right) \\ &= x \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right). \end{aligned}$$

esattamente come sopra.