

Capitolo 7

Limiti di funzioni

7.1 Retta ampliata

Definizione 7.1 Si definisce retta ampliata l'insieme

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Per analogia con \mathbf{R} , gli elementi di $\overline{\mathbf{R}}$ continuiamo a chiamarli punti

Per ogni $x \in \overline{\mathbf{R}}$ definiamo particolari sottoinsiemi denominati *intorni (aperti)* di x .

- Se $x \in \mathbf{R}$, consideriamo gli intervalli

$$(x - \epsilon, x + \epsilon)$$

essendo $\epsilon > 0$.

- Se $x = +\infty$, consideriamo le semirette

$$(m, +\infty).$$

- Se $x = -\infty$, consideriamo le semirette

$$(-\infty, M).$$

Definizione 7.2 Si dice che una certa proprietà è vera localmente in $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ se esiste I intorno di x_0 tale che la proprietà è verificata per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Diamo ora una definizione che occupa un ruolo centrale nella teoria dei limiti di funzioni.

Definizione 7.3 Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Il punto x_0 si dice di accumulazione per A se esiste una successione di punti $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq x_0$ tale che

$$\lim_n x_n = x_0.$$

Diremo di accumulazione da destra (risp. sinistra) se $x_n > x_0$ (risp. $x_n < x_0$).

Proposizione 7.4 *Se l'insieme A è un intervallo o unione finita di intervalli, i punti di accumulazione sono tutti e soli i punti interni e i punti di bordo di ciascun intervallo che compone A .*

Quindi per evitare situazioni “patologiche”, d'ora in avanti considereremo soltanto intervalli o unioni di intervalli.

Osservazione 7.5 *Se x_0 è punto di accumulazione per A , allora esistono infinite successioni $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq x_0$ tali che*

$$\lim_n x_n = x_0.$$

7.2 Limiti di funzioni

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A , $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 7.6 *Si dice che ℓ è il limite di f per x che tende ad x_0 se, per ogni successione $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \rightarrow x_0$, risulta anche $f(x_n) \rightarrow \ell$. In questo caso si scrive*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Osservazione 7.7 *La definizione che abbiamo dato prende il nome di definizione sequenziale, cioè basata sulle successioni. Le definizioni tradizionali “per ogni ... esiste ...” sono facilmente reperibili su qualsiasi testo e sono perfettamente equivalenti alla definizione sequenziale; questa presenta il vantaggio di essere unificata rispetto ai nove casi possibili al variare di $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.*

La definizione precedente può essere riassunta come segue: l'espressione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

vuol dire che f trasforma tutte le successioni $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$ in successioni $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Un esempio banale di limite si ha nel caso della funzione costante.

Osservazione 7.8 *Sottolineiamo quanto è implicito nella definizione: poiché consideriamo successioni $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}$, il limite non dipende affatto da ciò che accade nel punto x_0 , il quale potrebbe anche non appartenere al dominio della funzione.*

Il senso della richiesta contenuta nella definizione di limite diventa più chiaro considerando situazioni in cui essa non è soddisfatta.

Esempio 7.9 *Consideriamo la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ed il punto $x_0 = 1$. Risulta quanto segue*

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 & f(x_n) &= 1 \rightarrow 1, \\ t_n &= 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 & f(t_n) &= 0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque non esiste $\lim_{x \rightarrow 1} \lfloor x \rfloor$.

Esempio 7.10 Consideriamo la funzione $f(x) = \sin 1/x$ ed il punto $x_0 = 0$.
Risulta quanto segue

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{2}{\pi(1+4n)} \rightarrow 0 & f(x_n) &= 1 \rightarrow 1, \\t_n &= \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0 & f(t_n) &= 0 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Dunque non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x$.

7.2.1 Tre casi particolari

Per le funzioni vale una classificazione analoga a quella introdotta per le successioni: si parla dunque di funzioni regolari, convergenti, divergenti (intendendo sempre in x_0).

Tre situazioni sono tipiche del limite di funzioni.

- continuità in x_0
- asintoto verticale
- asintoto orizzontale

7.2.2 Carattere locale del limite

Come sopra $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A , $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Proposizione 7.11 (limite della restrizione) Sia $B \subset A$ e x_0 sia punto di accumulazione anche per B . Se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

allora risulta anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_B(x) = \ell.$$

La proposizione seguente mostra che il limite dipende solo dal comportamento locale di f in x_0 .

Proposizione 7.12 Sia I intorno di x_0 . Risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap I}(x) = \ell.$$

Corollario 7.13 Siano $C \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per C , $g : C \rightarrow \mathbf{R}$. Se f e g coincidono localmente in x_0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Questo corollario è utile per calcolare limiti in cui si può “effettuare una semplificazione” del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x + 4) = 16$$

Infatti, posto

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \\ g(x) &= x^2 + 4x + 4, \end{aligned}$$

le funzioni f e g sono diverse, in quanto f è definita per $x \neq 2$, mentre g è definita per ogni x . Tuttavia esse coincidono per $x \neq 2$, dunque i limiti per $x \rightarrow 2$ coincidono.

Stabilire l'uguaglianza è vantaggioso. Infatti, come vedremo nei prossimi paragrafi, il calcolo del limite di f si presenta come una forma indeterminata, mentre il calcolo del limite di g è immediato (per continuità e linearità).

7.2.3 Limiti unilaterali

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 7.14 Sia $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione da destra (risp. da sinistra) per A .

Si dice che ℓ è il limite di f per x che tende ad x_0 da destra (risp. da sinistra) se, per ogni successione $\{x_n\} \subset A$, $x_n > x_0$ (risp. $x_n < x_0$) tale che $x_n \rightarrow x_0$, risulta anche $f(x_n) \rightarrow \ell$. In questo caso si scrive

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \ell \\ (\text{risp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \ell). \end{aligned}$$

Esempio 7.15 Utilizzando la definizione si dimostra che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor &= 1. \end{aligned}$$

Proposizione 7.16 Sia x_0 punto di accumulazione bilaterale ...

Dimostrazione. Un'implicazione è conseguenza della Proposizione ... ■

Teorema 7.17 (Regolarità delle funzioni monotone) Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ monotona, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Se il punto x_0 è di accumulazione a destra per A , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf_{x > x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \sup_{x > x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Se il punto x_0 è di accumulazione a sinistra per A , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup_{x < x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \inf_{x < x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Ovviamente nelle formule precedenti non si escludono i casi: $\sup = +\infty$ e $\inf = -\infty$.

Osservazione 7.18 *La denominazione assegnata al Teorema non è precisa: infatti nei punti interni non è assicurata l'esistenza del limite, ma l'esistenza dei due limiti unilaterali.*

7.2.4 Rapporto tra successioni e funzioni

Dal punto di vista logico tutta la teoria dei limiti viene a dipendere dai limiti di successioni. Dal punto di vista pratico e, dunque, negli esercizi, i limiti di successioni si ricavano dai limiti delle funzioni. Sussiste infatti la seguente proposizione.

Proposizione 7.19 *Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$. Se esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, allora esiste $\lim_n f(n) = \ell$.*

Osserviamo esplicitamente che quando scriviamo \lim_n intendiamo limite nel senso delle successioni.

Dimostrazione. Dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ equivale ad affermare che per ogni successione $x_n \rightarrow +\infty$ risulta

$$f(x_n) \rightarrow \ell$$

In particolare possiamo considerare la successione $x_n = n$ e quindi risulta

$$f(n) \rightarrow \ell.$$

■

Osservazione 7.20 *Non è vero il viceversa, nel senso che se $\lim_n f(n) = \ell$ non è affatto detto che esista $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e che sia uguale ad ℓ . Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$.*

7.3 Teoremi sui limiti

Teorema di permanenza del segno

Teorema di confronto

Teorema di divergenza obbligata

Teorema di convergenza obbligata

7.4 Algebra dei limiti

Siano $A \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A (eventualmente solo da destra o da sinistra), $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Vogliamo studiare il comportamento del limite rispetto alle operazioni algebriche. In quanto segue tutti i limiti sono da intendersi per $x \rightarrow x_0$ (eventualmente unilateralmente).

Proposizione 7.21 *Se le funzioni f e g sono entrambe convergenti, allora il limite della somma $f + g$ è uguale alla somma dei due limiti.*

Se la funzione f diverge positivamente e la funzione g è limitata dal basso (in particolare convergente), allora la funzione somma $f + g$ diverge positivamente (effetto di trascinamento).

Se la funzione f diverge negativamente e la funzione g è limitata dall'alto (in particolare convergente), allora la funzione somma $f + g$ diverge negativamente.

Osservazione 7.22 *Nulla si può dire sul limite della somma, qualora entrambe le funzioni siano divergenti in senso opposto: forma indeterminata (o di indecisione) $+\infty - \infty$.*

Contrariamente all'uso comune nelle equazioni, in questo contesto l'aggettivo "indeterminato" vuol dire che il limite non è determinato (ossia non si ottiene) dalla Proposizione ..., ma va studiato caso per caso con tecniche ad hoc. La terminologia "forma di indecisione" forse rende meglio questo concetto.

Diamo ora una comoda definizione.

Definizione 7.23 *La funzione f si dice infinitesima in x_0 se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Proposizione 7.24 *Se le funzioni f e g sono entrambe convergenti, allora il limite del prodotto $f \cdot g$ è uguale al prodotto dei due limiti.*

Se la funzione f diverge e la funzione g verifica localmente la condizione

$$g(x) < -\delta < 0 \quad \text{oppure} \quad 0 < \delta < g(x)$$

(in particolare converge ad $l \neq 0$, oppure diverge), allora la funzione prodotto $f \cdot g$ diverge con segno da stabilirsi caso per caso.

Se la funzione f è infinitesima e la funzione g è localmente limitata, allora la funzione prodotto $f \cdot g$ è infinitesima.

Osservazione 7.25 *Nulla si può dire sul limite del prodotto qualora una funzione sia infinitesima e l'altra sia divergente: forma indeterminata (o di indecisione) $0 \cdot \pm\infty$.*

Proposizione 7.26 *Se la funzione f converge ad $l \in \mathbf{R}^*$, allora la funzione $1/f$ converge a $1/l$.*

Se la funzione f diverge, allora la funzione $1/f$ è infinitesima.

Nelle ipotesi della proposizione precedente era implicito (Teorema di permanenza del segno) che per la funzione $1/f(x)$ si potesse calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$.

Proposizione 7.27 *Supponiamo f infinitesima.*

Se in un intorno di x_0 risulta $f(x) > 0$ (nel qual caso scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$), allora la funzione $1/f(x)$ diverge positivamente.

Se in un intorno di x_0 risulta $f(x) < 0$ (nel qual caso scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$), allora la funzione $1/f(x)$ diverge negativamente.

Qualora f sia infinitesima in x_0 ma non sussistono le ipotesi della proposizione precedente, il limite di $1/f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ non è detto che abbia senso e, se ha senso, non esiste.

Osservazione 7.28 *Tenendo presente che*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

dalle proposizioni precedenti inerenti il limite del prodotto ed il limite del reciproco, conseguono ovvi risultati concernenti il limite del rapporto.

Osservazione 7.29 *In particolare nei rapporti si presentano due forme indeterminate*

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad e \quad \frac{0}{0};$$

invece, se $l \in \mathbf{R}$, non è forma indeterminata

$$\frac{l}{\pm\infty}$$

così come non sono indeterminate

$$\frac{\pm\infty}{0^+} \quad e \quad \frac{\pm\infty}{0^-}.$$

7.4.1 Limite della funzione composta

Riportiamo i due teoremi più semplici.

Si abbiano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}$, $g : B \rightarrow \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A ; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Teorema 7.30 *Supponiamo $y_0 \in B$ e g continua in y_0 . Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

Teorema 7.31 *Supponiamo $y_0 = \pm\infty$ punto di accumulazione per B . Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

ammesso che il limite a secondo membro esista.

7.5 Confronto di infiniti ed infinitesimi

Si abbiano $A \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A , $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Partiamo con una comoda definizione.

Definizione 7.32 *La funzione f si dice infinita in x_0 se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Definizione 7.33 Se f_1 ed f_2 sono funzioni infinite in x_0 si dice che f_1 è di ordine superiore a f_2 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty. \quad (7.1)$$

Se vale la (...) si dice che “ f_1 diverge più rapidamente di f_2 ”; talvolta si dice anche che “ f_1 cresce più rapidamente di f_2 ”, ma ovviamente non vi è alcun riferimento alla monotonia. Si dice anche che f_2 è trascurabile rispetto a f_1 .

Definizione 7.34 Se f_1 ed f_2 sono funzioni infinitesime in x_0 si dice che f_1 è di ordine superiore a f_2 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0. \quad (7.2)$$

Se vale la () si dice anche che “ f_1 tende a 0 più rapidamente di f_2 ”. Si dice anche che f_1 è trascurabile rispetto a f_2 .

In generale sussiste la seguente definizione.

Definizione 7.35 Assegnate due funzioni qualsiasi f_1 ed f_2 definite su A , si dice che f_1 è trascurabile rispetto ad f_2 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Osservazione 7.36 Talvolta si parla abbastanza impropriamente di “Teoria degli ordini”, specie negli esercizi di calcolo dei limiti. Vogliamo sottolineare che noi non abbiamo definito l’ordine di una funzione infinita o infinitesima; assai di rado useremo questa terminologia e sarà solo nel senso delle definizioni precedenti.

7.5.1 Crescita all’infinito

...

7.6 Limite delle funzioni elementari

...

7.7 Primi esempi

...

Capitolo 8

Funzioni continue

La continuità in un punto è stata data nella Definizione Si tratta di una nozione di carattere puntuale, con un'ovvia definizione otteniamo una nozione di carattere globale.

Definizione 8.1 Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$; la funzione f si dice continua se è continua in ciascun punto di A .

Osservazione 8.2 I teoremi sui limiti diventano immediatamente teoremi sulle funzioni continue (in un punto o globalmente): la somma, il prodotto, la composta di funzioni continue sono funzioni continue.

Stando alla definizione data in precedenza dire che una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ non è continua equivale a dire che esiste almeno un punto $x_0 \in A$ tale che f non sia continua in x_0 .

Esempio 8.3 La funzione parte intera non è continua, infatti nei punti con ascissa intera non esiste il limite.

8.1 Prolungamenti e salti

Un tema legato alla continuità è lo studio del comportamento nei punti di accumulazione per il dominio, appartenenti o meno al dominio stesso. Due situazioni sono particolarmente interessanti.

Definizione 8.4 Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Sia $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \notin A$, x_0 punto di accumulazione per A . Se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ si dice che f è prolungabile per continuità in x_0 . In tal caso x_0 si considera appartenente al dominio di f e si pone $f(x_0) = \ell$.

Esempio 8.5 La funzione $f(x) = x \log x$ è definita per $x > 0$. Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

pertanto il punto 0 si considera appartenente al dominio con $f(0) = 0$.

Esempio 8.6 La funzione $f(x) = \sin x/x$ è definita per $x \neq 0$. Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1,$$

pertanto il punto 0 si considera appartenente al dominio con $f(0) = 1$.

Definizione 8.7 Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ punto di accumulazione bilaterale per A . Il punto x_0 si dice di salto per f se esistono, sono finiti e diversi tra loro i limiti unilaterali

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \\ f(x_0^-) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x). \end{aligned}$$

Si definisce salto di f in x_0 la differenza

$$\sigma(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-).$$

Osservazione 8.8 Nella definizione precedente non si specifica se x_0 debba appartenere o meno ad A .

Se un punto appartenente al dominio è anche di salto (ad esempio i punti con ascissa intera per la funzione $\lfloor x \rfloor$) in quel punto si perde la continuità. Questo giustifica la terminologia tradizionale che parla di punti di discontinuità.

In altri casi il punto di salto non appartiene al dominio e quindi, con apparente paradosso, non fa perdere la continuità. E' quello che accade alla funzione $y = x/|x|$, continua (in quanto continua in tutti i punti del suo insieme di definizione $\mathbf{R} - \{0\}$) e che presenta un punto di salto in $x_0 = 0$.

In quasi tutti i testi di Analisi matematica si introduce la nozione di *punto di discontinuità*, con classificazioni che cambiano da autore ad autore. Noi ci siamo limitati a riportare le definizioni su cui tutti gli autori concordano.

8.2 Funzioni continue su intervalli

Teorema 8.9 (di Weierstrass) ...

Controesempi

$$f(x) = 1/x \text{ in } (0, 1] \text{ e in } [1, +\infty).$$

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \text{ in } [0, 1]$$

Teorema 8.10 (degli zeri) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Se f è strettamente monotona, tale c è unico.

Il Teorema degli zeri fornisce il primo strumento per la *risoluzione qualitativa di equazioni*, che sostituisce o integra la cosiddetta *risoluzione grafica*. Per risoluzione qualitativa di un'equazione intendiamo la determinazione del numero di soluzioni, con un'indicazione sulla collocazione delle soluzioni stesse.

Il Teorema degli zeri fornisce una condizione sufficiente (e grossolana) affinché una soluzione esista. Il corollario seguente è più preciso in quanto fornisce una condizione necessaria e sufficiente.

Corollario 8.11 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua e strettamente monotona. L'equazione

$$f(x) = 0$$

ammette soluzione unica in (a, b) se e solo se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

In base a questo corollario il numero di zeri è minore o al più uguale al numero di intervalli di stretta monotonia e in ciascun intervallo abbiamo un criterio per verificare se uno zero esiste o meno (salvo il caso in cui lo zero coincida con l'estremo di due intervalli adiacenti). Di fatto il Corollario ... potrà essere compiutamente applicato solo dopo che avremo strumenti per determinare la monotonia di una funzione (vedi Paragrafo ...)

Osservazione 8.12 Il Teorema degli zeri ed il suo corollario ammettono ovvie varianti nel caso di intervalli aperti o semiaperti, limitati o illimitati:

- in luogo di $f(a)$ si considera $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$;
- in luogo di $f(b)$ si considera $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Presentiamo ora alcuni esempi, per calcolare i limiti potrebbero servire tecniche che vengono illustrate nel capitolo seguente.

Esempio 8.13 Si consideri l'equazione

$$3^x - 2 = \frac{4^x}{2^x - 3}.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito in $\mathbf{R} - \{\log 3 / \log 2\}$. Pertanto, posto

$$x_0 = \log 3 / \log 2,$$

appliciamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = 3^x - 2 - \frac{4^x}{2^x - 3}$$

in due intervalli distinti: $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

quindi esiste una soluzione in $(-\infty, x_0)$.

Analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

dunque esiste un'altra soluzione in $(x_0, +\infty)$.

Osserviamo che $x_0 > 0$ e calcoliamo $f(0) < 0$. Quindi possiamo precisare che esiste una soluzione in $[0, x_0)$.

Esempio 8.14 Si consideri l'equazione

$$\frac{x-1}{\arctan x} = \frac{x}{\log x - 1}$$

Il primo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$; il secondo membro è definito per $x > 0$, $x \neq e$. Pertanto applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{\arctan x} - \frac{x}{\log x - 1}$$

che risulta definita in due intervalli distinti: $(0, e)$ e $(e, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi esiste una soluzione in $(0, e)$.

Analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

dunque esiste un'altra soluzione in $(e, +\infty)$.

8.3 Immagine diretta di intervalli

Dal Teorema degli zeri si deduce il risultato seguente.

Teorema 8.15 Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo ed $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.

Noi possiamo dimostrare facilmente un caso particolare.

Teorema 8.16 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Se f è monotona crescente (risp. decrescente) risulta

$$\begin{aligned}f([a, b]) &= [f(a), f(b)] \\ (\text{risp. } f([a, b]) &= [f(b), f(a)]).\end{aligned}$$

Osservazione 8.17 Anche per quest'ultimo teorema sussistono ovvie varianti nel caso di intervalli aperti o semiaperti, limitati o illimitati:

- in luogo di $f(a)$ si considera $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$;
- in luogo di $f(b)$ si considera $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Dal punto di vista operativo, assegnata $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua, per calcolare $f(I)$ si scompone I in tanti sottointervalli in cui la funzione risulti monotona ed in ciascuno di essi si applica il Teorema

Esempio 8.18 *Assegnata $f(x) = x^2$, vogliamo calcolare $f([-1, 2])$. Risulta*

$$\begin{aligned} f([-1, 2]) &= f([-1, 0] \cup [0, 2]) = \\ &= f([-1, 0]) \cup f([0, 2]) = \\ &= [f(0), f(-1)] \cup [f(0), f(2)] = \\ &= [0, 1] \cup [0, 4] = [0, 4]. \end{aligned}$$

Esercizio 8.19 *Assegnata $f(x) = \cos x$, si calcoli $f([-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}])$.*