

# Capitolo 6

## Successioni

### 6.1 Generalità

Si definisce *successione reale* ogni funzione reale definita sull'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali.

In luogo della consueta notazione

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R},$$

se ne adotta tradizionalmente un'altra

$$\{x_n\} \subset \mathbf{R}$$

intendendo

$$n \in \mathbf{N} \mapsto x_n \in \mathbf{R}.$$

**Esempio 6.1** *Si scrive*

$$\begin{aligned} \{x_n\} &\subset \mathbf{R} \\ x_n &= n - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

*e dunque risulta*

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \\ x_1 &= 1 - \sqrt{2}, \\ x_2 &= 2 - \sqrt{3}, \\ x_3 &= 1, \\ x_4 &= \dots \end{aligned}$$

La variabile indipendente  $n$  prende il nome di *indice*.

**Osservazione 6.2** *Talvolta, abbastanza informalmente, una successione si rappresenta come un insieme infinito*

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots\},$$

*i cui elementi sono contrassegnati da un intero naturale.*

**Osservazione 6.3** Per parlare di successione, si richiede che  $x_n$  sia definita per ogni  $n \geq n_0 \in \mathbf{N}$ .

Ad esempio

$$x_n = \frac{n}{2^n - 8}$$

è definita per  $n \geq 4$ .

### 6.1.1 Successioni per ricorrenza

Solo le successioni (e non le generiche funzioni reali), possono essere definite tramite una formula per ricorrenza del tipo

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{R} \\ x_{n+1} = f(n, x_n) \end{cases}$$

**Esempio 6.4** Il fattoriale

**Esempio 6.5** Piano di accumulo, con rata costante  $R$  ed interesse costante  $i$

$$\begin{cases} M_0 = R \\ M_{n+1} = (1 + i)M_n + R \end{cases}$$

In questo caso è disponibile anche una formula esplicita

$$M_n = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

**Esempio 6.6** Successione caotica

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \end{cases}$$

Per  $\lambda \in [0, 4]$  si ha  $x_n \in [0, 1]$ .

Per  $\lambda$  prossimo a 4, abbiamo comportamento irregolare e dipendenza sensibile dal punto iniziale  $x_0$ .

### 6.1.2 Rappresentazione grafica delle successioni

Per punti...

## 6.2 Proprietà delle successioni

Poiché una successione  $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$  è in sostanza una funzione possiamo parlare di

- successioni limitate (dall'alto o dal basso),
- maggioranti e minoranti,
- estremo superiore o inferiore, denotati rispettivamente con

$$\sup_n x_n, \quad \inf_n x_n.$$

La monotonia si esprime in maniera diversa rispetto alle funzioni.

**Definizione 6.7** Una successione  $\{x_n\}$  si dice monotona crescente se, per ogni  $n \in \mathbf{N}$

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Analogamente si danno le definizioni di successione

- strettamente crescente,
- decrescente,
- strettamente decrescente.

Ai fini dello studio delle successioni, i comportamenti rilevanti sono quelli che si verificano da un certo indice in poi. A questo scopo introduciamo una definizione

**Definizione 6.8** Una proprietà inerente i termini di una successione  $\{x_n\}$  si dice definitiva se è verificata da un certo indice in poi.

**Esempio 6.9** Si consideri la successione

$$x_n = \frac{n^2}{2} + 4(-1)^n$$

essa è definitivamente monotona crescente (monotona da  $n = 7$  in poi).

## 6.3 Limiti di successioni

**Definizione 6.10** Siano  $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$  ed  $\ell \in \mathbf{R}$ . Si dice che la successione  $\{x_n\}$  è convergente ad  $\ell$  se, per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che, per ogni  $n \geq \nu$

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$$

**Esempio 6.11** Una successione costante  $x_n = a$  converge al valore  $a$ .

**Esempio 6.12**  $x_n = 1/(n^2 + 4)$  converge a 0.

**Lemma 6.13** Se la successione  $\{x_n\}$  è convergente ad  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ , allora necessariamente

$$\ell_1 = \ell_2$$

**Dimostrazione.** fatta ■

Il lemma precedente è alla base della definizione che stiamo per dare

**Definizione 6.14** Se la successione  $\{x_n\}$  è convergente ad  $\ell$ , si dice che  $\ell$  è il limite di  $x_n$  e si scrive

$$\ell = \lim_n x_n.$$

Osserviamo che

- $\lim_n x_n = \ell$  se e solo se  $\lim_n (x_n - \ell) = 0$ ;

- $\lim_n a_n = 0$  se e solo se  $\lim_n |a_n| = 0$ .

**Definizione 6.15** Si dice che la successione  $\{x_n\}$  è divergente positivamente se, per ogni  $M \in \mathbf{R}$  esiste  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che, per ogni  $n \geq \nu$

$$M < x_n.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_n x_n = +\infty.$$

**Esempio 6.16** La successione

$$x_n = \sqrt{n+4}$$

è divergente positivamente; la successione

$$x_n = [1 + (-1)^n]2^n$$

è illimitata superiormente ma non diverge positivamente.

**Definizione 6.17** Si dice che la successione  $\{x_n\}$  è divergente negativamente se, per ogni  $m \in \mathbf{R}$  esiste  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che, per ogni  $n \geq \nu$

$$x_n < m.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_n x_n = -\infty.$$

**Definizione 6.18** La successione  $\{x_n\}$  si dice regolare se ammette limite (finito o infinito).

**Proposizione 6.19** Se la successione  $\{x_n\}$  è convergente, è anche limitata.

Non vale il viceversa, come mostra la successione  $\{(-1)^n\}$ . Dunque, a parte la somiglianza terminologica, tipica della lingua italiana, esistono successioni limitate che non ammettono limite.

### 6.3.1 Successioni monotone

**Teorema 6.20** Le successioni monotone sono regolari. In particolare se  $\{a_n\}$  è una successione crescente risulta

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

**Dimostrazione.** fatta nel caso  $\sup_n a_n = +\infty$  ■

**Esempio 6.21 (il numero di Nepero)** Si consideri la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Si può dimostrare che tale successione è strettamente monotona crescente e limitata dall'alto. Pertanto tale successione ammette limite finito. Tale limite prende il nome di numero di Nepero e si denota con la lettera  $e$ . Risulta dunque

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Si può dimostrare, inoltre, che  $e$  è un numero irrazionale compreso tra 2 e 3.

### 6.3.2 Progressione geometrica

Fissato  $q \in \mathbf{R}$ , si può considerare la successione  $q^n$ , detta anche progressione geometrica. Il comportamento di tale successione dipende da  $q$ , detta anche ragione della progressione.

- Se  $q > 1$ , allora  $q^n$  è strettamente monotona crescente e diverge positivamente.
- Se  $q = 1$ , allora  $q^n = 1$  e quindi la successione tende ad 1.
- Se  $q \in (-1, 1)$ , la successione tende a 0. In particolare
  - se  $q \in (0, 1)$  la successione è strettamente monotona decrescente;
  - se  $q = 0$ , allora  $q^n = 0$ .
- Se  $q = -1$ , allora  $q^n$  è limitata, non regolare.
- Se  $q < -1$ , allora  $q^n$  è non limitata, non regolare.

## 6.4 Teoremi sui limiti

**Lemma 6.22 (permanenza del segno)** *Sia assegnata una successione  $\{a_n\}$ . Se  $\lim_n a_n > 0$ , allora esiste  $m > 0$  tale che definitivamente  $a_n \geq m$ ; in particolare definitivamente  $a_n > 0$ .*

Ovviamente vale un risultato analogo nel caso di limite negativo.

**Teorema 6.23 (di confronto)** *Sia assegnata una successione  $\{a_n\}$  regolari e tali che, definitivamente*

$$0 \leq a_n.$$

Allora

$$0 \leq \lim_n a_n.$$

**Dimostrazione.** Per assurdo se fosse  $\lim_n a_n < 0$  dovrebbe risultare definitivamente  $a_n < 0$ , in contraddizione con l'ipotesi. ■

**Teorema 6.24 (di divergenza obbligata)** *Siano assegnate due successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  tali che, definitivamente*

$$a_n \leq b_n.$$

Allora se  $\{a_n\}$  diverge positivamente, anche  $\{b_n\}$  diverge positivamente.

**Teorema 6.25 (di convergenza obbligata)** *Siano assegnate tre successioni  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  e  $\{c_n\}$  tali che, definitivamente*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Allora se  $\{a_n\}$  e  $\{c_n\}$  convergono ad  $\ell \in \mathbf{R}$ , anche  $\{b_n\}$  converge ad  $\ell$ .

**Dimostrazione.** fatta ■

## 6.5 Due particolari successioni estratte

Sia assegnata una successione  $\{x_n\}$ . Accanto a questa successione possiamo considerarne altre due

$$\{x_{2n}\} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

(*successione dei termini di indice, o posto, pari*) e analogamente

$$\{x_{2n+1}\} = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$$

(*successione dei termini di indice, o posto, dispari*).

A livello (quasi informale) possiamo dare la seguente definizione.

**Definizione 6.26** *Una successione  $\{y_n\}$  si dice estratta dalla  $\{x_n\}$  se è ottenuta dalla  $\{x_n\}$  selezionando un insieme infinito di indici. Tipicamente le successioni estratte si denotano con  $\{x_{k_n}\}$ .*

Come ulteriori esempi possiamo considerare

- $\{x_{3n}\} = \{x_0, x_3, x_6, \dots\}$ ;
- $\{x_{n^2}\} = \{x_0, x_1, x_4, \dots\}$ .

**Proposizione 6.27** *Se  $\{x_n\}$  è regolare, tutte le successioni estratte sono regolari ed hanno lo stesso limite della  $\{x_n\}$ .*

Le successioni  $\{x_{2n}\}$  e  $\{x_{2n+1}\}$ , considerate congiuntamente, godono di una ulteriore proprietà.

**Proposizione 6.28** *La successione  $\{x_n\}$  è regolare se e solo se le successioni  $\{x_{2n}\}$  e  $\{x_{2n+1}\}$  hanno lo stesso limite  $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ . In questo caso risulta anche*

$$\lim_n x_n = \ell.$$