

Capitolo 9

Esponenziali e logaritmi

...

Capitolo 10

Funzioni circolari

10.1 Descrizione di fenomeni periodici

Tra le funzioni elementari ne esistono due atte a descrivere fenomeni che si ripetono periodicamente nel tempo. Si tratta delle funzioni *coseno* e *seno*

$$\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Se il nostro interesse fosse limitato a semplicemente a descrivere i fenomeni periodici, potremmo anche utilizzare una sola di queste funzioni, infatti esse si ricavano l'una dall'altra con una traslazione.

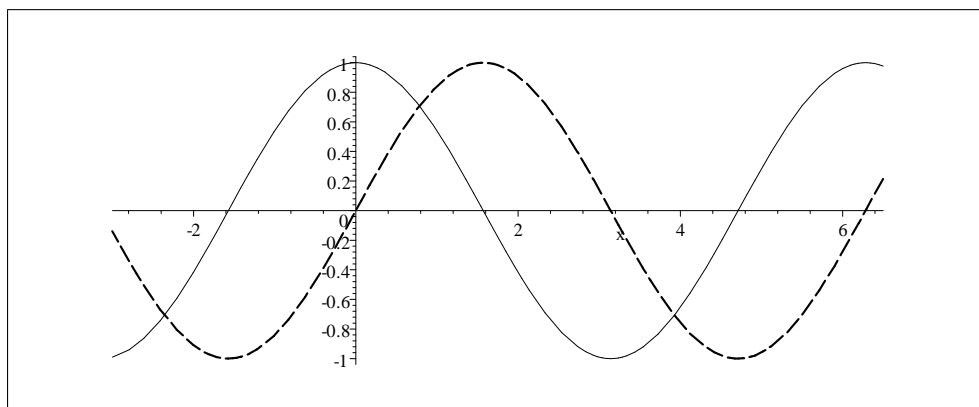


Figura 10.1: $\cos x$ (linea continua), $\sin x$ (linea tratteggiata)

D'altra parte esistono valide ragioni di tipo matematico per tenere distinte queste due funzioni.

Da \cos e \sin otterremo la funzione *tangente* denotata con \tan . Infine, con opportune procedure di restrizione, verranno introdotte le funzioni circolari inverse: \arccos , \arcsin , \arctan .

10.2 Osservazioni critiche sulle definizioni

L'origine delle funzioni \cos e \sin è di natura geometrica. Infatti, come a tutt'oggi si insegna nelle scuole medie superiori, *coseno* e *seno* sono nomi di grandezze associate ad un angolo.

Dalla geometria elementare forse ricordiamo che per *angolo* si intende una “porzione di piano delimitata da due semirette aventi l'origine in comune”.

In realtà il termine “angolo” viene usato, anche in queste pagine, in maniera estensiva e non perfettamente corrispondente alla precedente definizione:

- assegnato un triangolo, si parla di angolo nel vertice, nozione che poco si concilia con la nozione di porzione “illimitata” di piano definita sopra;
- si potrebbe parlare dell'angolo formato da due segmenti aventi un estremo in comune;
- in altri contesti si parla anche di angolo individuato da vettori.

D'altra parte per definire le funzioni circolari dovremmo introdurre una nuova nozione, quella di angolo orientato, ed identificare angoli (orientati) e numeri reali tramite la misurazione in radianti.

E' stato osservato che questi approcci non soddisfano pienamente l'esigenza di rigore matematico: vaga la nozione di arco orientato, la sua parentela con l'angolo della geometria euclidea; non sempre precisi i riferimenti alla lunghezza degli archi della circonferenza, ... (G. Prodi). Cercare di armonizzare queste nozioni avrebbe come unico effetto quello di appesantire la trattazione.

Una possibile definizione delle funzioni \cos e \sin utilizzerà concetti di tipo intuitivo, a partire dalla rotazione di un punto sulla circonferenza goniometrica.

10.3 Misurazione degli angoli

A livello elementare gli angoli vengono misurati in gradi, primi, secondi ... si tratta di un'eredità della matematica antica.

Ricordiamo che

- la misura dell'angolo giro, ossia dell'angolo ottenuto con una rotazione completa della semiretta è pari a 360 gradi;
- la misura dell'angolo piatto è pari a 180 gradi;
- la misura dell'angolo retto è pari a 90 gradi;
- un primo è un sessantesimo di grado;
- un secondo è un sessantesimo di primo.

Ad esempio una possibile misura di angolo è $30^\circ 15' 23''$.

Ora vogliamo introdurre una misura dell'angolo tramite un numero reale. La definizione è di tipo operativo.

Definizione 10.1 *Si consideri un arco di circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo; siano r il raggio ed ℓ la lunghezza dell'arco di circonferenza delimitato dall'angolo stesso; si definisce misura dell'angolo in radianti il rapporto ℓ/r .*

La definizione è ben posta in quanto si prova che il rapporto ℓ/r non dipende dalla particolare circonferenza prescelta.

Potrà risultare utile imparare le misure in radianti di alcuni angoli di uso particolarmente frequente.

gradi	radianti
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

10.4 Definizione intuitiva di cos e sin

Nel piano cartesiano, definiamo *circonferenza goniometrica* la circonferenza C avente centro in $(0,0)$ e raggio 1. Tale circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Definizione 10.2 Consideriamo un punto mobile P che, partendo da $A = (1,0) \in C$, si muove sulla circonferenza in senso antiorario.

Sia $t \geq 0$. Si definisce $\cos t$ l'ascissa del punto P dopo che ha percorso un arco di lunghezza x . Analogamente si definisce $\sin x$ l'ordinata del punto P dopo che ha percorso un arco di lunghezza x .

Osservazione 10.3 Osserviamo che percorrere sulla circonferenza goniometrica un arco di lunghezza x equivale a dire che l'angolo \widehat{AOP} ha una misura in radianti pari a x .

Facciamo alcuni esempi.

Per $t = 0$ il punto P non si sposta da $A = (1,0)$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\cos 0 &= 1 \\ \sin 0 &= 0\end{aligned}$$

Passiamo ora a $t = \pi/3$ (vedi Figura 1.2). In base a quanto osservato, dire che l'arco AP ha lunghezza $\pi/3$ equivale a dire che l'angolo \widehat{AOP} ha misura in radianti $\pi/3$. Pertanto il triangolo AOP è equilatero. Il coseno di $\pi/3$ è per definizione l'ascissa di P e quindi

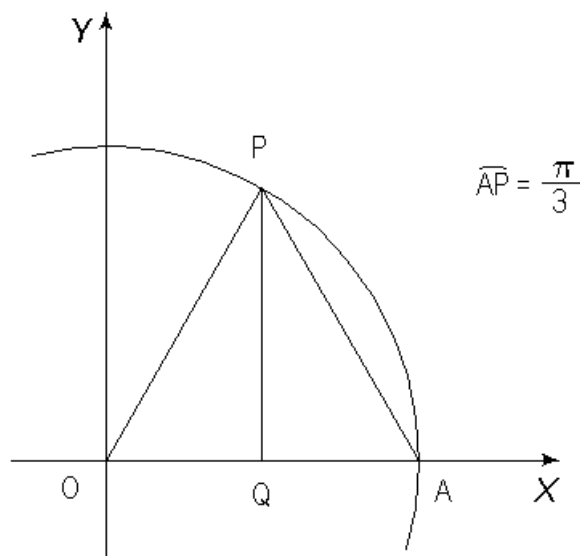
$$\cos \frac{\pi}{3} = \overline{OQ} = \frac{1}{2}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPQ otteniamo

$$\sin \frac{\pi}{3} = \overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo presente che la circonferenza C ha lunghezza pari a 2π , per $t = \pi/2$ il punto P ha percorso un quarto di circonferenza, raggiungendo la posizione $(0,1)$. Avremo pertanto

$$\begin{aligned}\cos \pi/2 &= 0 \\ \sin \pi/2 &= 1\end{aligned}$$



Per $t \in [0, \pi/2]$ le funzioni \cos e \sin sono positive. Il coseno è strettamente negativo in $(\pi/2, 3\pi/2)$; il seno è strettamente negativo in $(\pi, 2\pi)$.

Per $t = 2\pi$ il punto P ha percorso l'intera circonferenza, ritornando nella posizione iniziale $A = (1, 0)$. Avremo pertanto

$$\begin{aligned}\cos 2\pi &= 1 \\ \sin 2\pi &= 0\end{aligned}$$

Per $t > 2\pi$ il punto inizia a ripercorrere la circonferenza. In particolare osserviamo che, per ogni t

$$\begin{aligned}\cos(t + 2\pi) &= \cos t \\ \sin(t + 2\pi) &= \sin t\end{aligned}$$

infatti percorrere sulla circonferenza C un arco di lunghezza $t + 2\pi$ vuol dire che, dopo un arco di lunghezza t , percorriamo la circonferenza per intero; tutto ciò equivale a percorrere un arco di lunghezza t .

Osservazione 10.4 Per completare la definizione dobbiamo considerare i valori $t < 0$. In tal caso la definizione è la stessa di sopra, solo che questa volta, partendo sempre da A , percorriamo la circonferenza in senso orario.

Poiché $(\cos t, \sin t)$ sono coordinate di un punto sulla circonferenza C , se ricordiamo l'equazione della circonferenza stessa, otteniamo la *relazione*

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

Osservazione 10.5 *Nel linguaggio della geometria possiamo dire che $(\cos t, \sin t)$ forniscono una rappresentazione parametrica della circonferenza.*

Osservazione 10.6 *Se alla variabile t diamo il significato di tempo, nel linguaggio della fisica possiamo dire che $(\cos t, \sin t)$ rappresentano le coordinate di un punto che si muove di moto circolare uniforme.*

Tutti questi fatti giustificano per \cos e \sin la denominazione di *funzioni circolari*.

10.5 Proprietà di base delle funzioni \cos e \sin

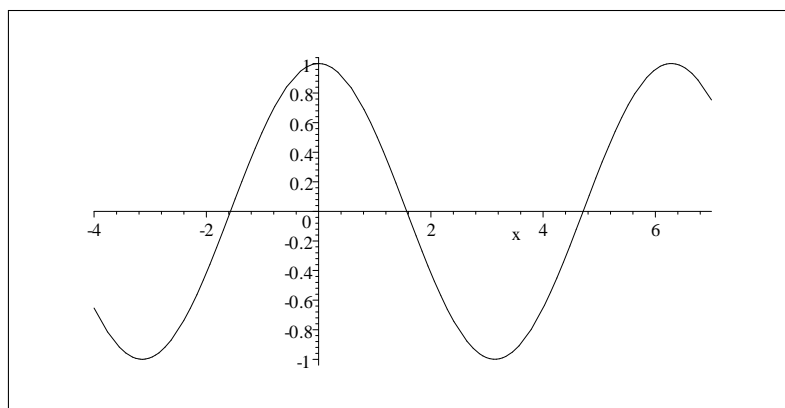
La presentazione intuitiva di \cos e \sin riportata nel paragrafo precedente è utile ma non indispensabile; come per le altre funzioni elementari, non sono importanti i dettagli tecnici quanto tenere a mente i grafici ed alcune proprietà (più o meno implicite nei grafici). Precisiamo, inoltre, che come variabile indipendente torniamo ad utilizzare la solita $x \in \mathbf{R}$.

Le funzioni \cos e \sin sono definite su tutto \mathbf{R}

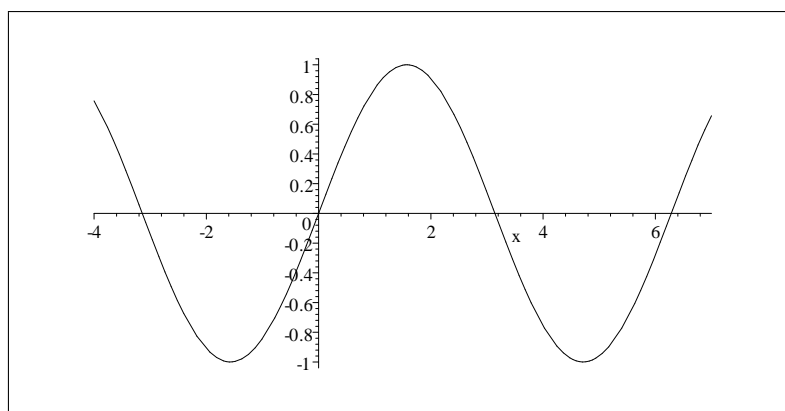
$$\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

e presentano i seguenti grafici



$y = \cos x$



$y = \sin x$

Entrambe le funzioni sono simmetriche: la funzione \cos è pari, la funzione \sin è dispari

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x, \\ \sin(-x) &= -\sin x.\end{aligned}$$

Entrambe le funzioni sono periodiche di periodo 2π

$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x\end{aligned}$$

Entrambe le funzioni assumono valori compresi tra -1 e 1

$$\begin{aligned}-1 &\leq \cos x \leq 1, \\ -1 &\leq \sin x \leq 1.\end{aligned}$$

e precisamente sono surgettive.

10.5.1 Restrizioni invertibili

Ovviamente, in quanto periodiche, le funzioni non possono essere invertibili. Tuttavia osserviamo quanto segue.

La restrizione

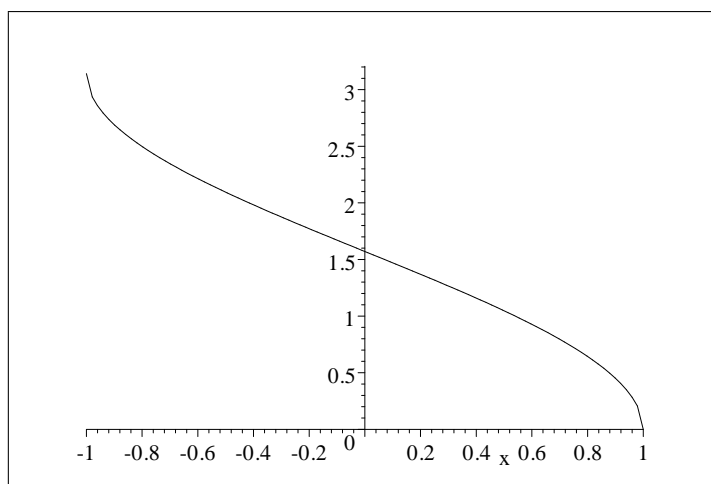
$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

è strettamente decrescente, bigettiva; chiameremo $[0, \pi]$ intervallo di invertibilità di \cos .

La funzione inversa della restrizione $(\)$ prende il nome di *arccoseno*

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

e presenta il seguente grafico



La restrizione

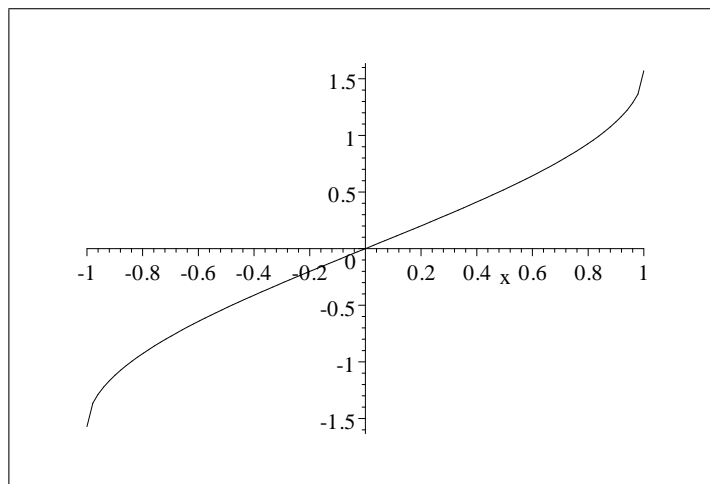
$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

è strettamente crescente, bigettiva; chiameremo $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallo di invertibilità di \sin .

La funzione inversa della restrizione () prende il nome di *arcoseno*

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

e presenta il seguente grafico



Osservazione importante

A proposito delle funzioni arccos e arcsin possiamo ripetere alcune delle considerazioni già svolte a proposito della funzione radice.

Ad esempio, se si vuole calcolare $\arcsin 1/\sqrt{2}$, (confondendo numeri e angoli) ci si chiede: quale angolo ha il seno uguale a $1/\sqrt{2}$?

Ragionando in questo modo si effettuano i seguenti passaggi:

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

se e solo se

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi, come vedremo tra un attimo, se e solo se

$$y = \begin{cases} \pi/4 (+2k\pi) \\ 3\pi/4 (+2k\pi) \end{cases}$$

Quindi stiamo dimenticando che \arcsin è una funzione a cui, per definizione stessa di funzione, corrisponde un solo valore.

La seconda equivalenza è corretta

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff y = \begin{cases} \pi/4 (+2k\pi) \\ 3\pi/4 (+2k\pi) \end{cases}$$

mentre la prima è falsa. Il ragionamento corretto è

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{con} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

e quindi si conclude

$$y = \pi/4.$$

10.5.2 Relazioni fondamentali e valori notevoli

Se introduciamo la convenzione

$$\begin{aligned}\cos^n x &= (\cos x)^n \\ \sin^n x &= (\sin x)^n\end{aligned}$$

possiamo riportare la *relazione fondamentale*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Da questa relazione si riottengono le limitazioni (). Inoltre si deduce che \cos e \sin non possono mai annullarsi contemporaneamente, anzi l'una assume valore ± 1 se e solo se l'altra si annulla.

Accanto alla relazione fondamentale (), le *formule di addizione* sono alla base di molte altre formule e proprietà.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

Riportiamo, infine, i cosiddetti *valori notevoli* delle funzioni \cos e \sin .

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1

10.6 Altre formule

Chi ha già avuto la disavventura di imbattersi nello studio della trigonometria forse ricorderà un lungo elenco di formule da tenere a memoria: può essere importante distinguere quelle di base, viste fino ad ora, da quelle che riportiamo di seguito e che si ricavano, per via puramente algebrica, dalle informazioni precedenti. Vogliamo precisare che, a causa del loro uso frequente, anche le formule riportate in questo paragrafo sono da ritenersi a memoria.

Le formule

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x\end{aligned}$$

possono essere ottenute in diversi modi, forse quello più semplice è attraverso le formule di addizione e i valori notevoli. Dunque le funzioni \cos e \sin , dopo mezzo periodo, presentano lo stesso valore cambiato di segno (e questo ci riporta alla definizione intuitiva).

Come sopra ricaviamo anche

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - x) &= \sin x \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos x\end{aligned}$$

Osservazione 10.7 Nel caso $0 \leq x \leq \pi/2$ possiamo ripensare all'interpretazione geometrica: detti α e β gli angoli acuti di un triangolo rettangolo il coseno dell'uno è uguale al seno dell'altro, infatti la somma delle misure (in radianti) dei due angoli è $\pi/2$.

Inoltre può essere interessante notare che

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x.$$

Questa relazione ci dice che, come avevamo anticipato, i grafici delle funzioni \cos e \sin sono ottenibili l'uno dall'altro con una traslazione orizzontale del grafico.

Ai fini della risoluzione degli esercizi, può fare comodo ricordare che

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

Dalle formule di addizione e dall'identità fondamentale si ottengono le *formule di duplicazione*

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

Esercizio 10.8 Possiamo suggerire di provare ad ottenere le formule di triplicazione

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

Dalle formule di duplicazione del coseno, sostituendo $x/2$ ad x , si ricavano le *formule di bisezione*

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{2} \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2}\end{aligned}$$

Da queste due ultime formule, con opportuni accorgimenti sul segno, si possono ricavare esplicitamente $\cos \frac{x}{2}$ e $\sin \frac{x}{2}$.

10.6.1 Un esempio di calcolo (addizione e bisezione)

Proviamo a calcolare

$$\cos \frac{7\pi}{12}.$$

Possiamo procedere in diversi modi. In ogni caso ci sembra inevitabile il ricorso alla formula di bisezione.

Osserviamo che

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

pertanto una prima possibilità è quella di applicare la formula di addizione e ricordare i valori notevoli

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= -\sin \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Per calcolare

$$\sin \frac{\pi}{12}$$

dobbiamo osservare che

$$\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6}$$

quindi utilizziamo le formule di bisezione

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1 - \cos \pi/6}{2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Si tratta ora di scegliere il segno di $\sin \frac{\pi}{12}$. Dal grafico, che ha costituito il nostro punto di partenza, sappiamo che nell'intervallo $[0, \pi/2]$ le funzioni \cos e \sin sono positive, pertanto

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

da cui

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

In alternativa potevamo osservare che

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \frac{7\pi}{6}$$

quindi applichiamo direttamente le formule di bisezione

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{7\pi}{12} &= \frac{1 + \cos \frac{7\pi}{6}}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos(\pi + \frac{\pi}{6})}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare il segno di $\cos \frac{7\pi}{12}$ dobbiamo ricordare (osservando il grafico) che nell'intervallo aperto $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ la funzione \cos è negativa. Pertanto otteniamo, come sopra,

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Esercizio 10.9 *Provare a calcolare*

$$\sin \frac{7\pi}{12}.$$

10.6.2 Formule di Werner

Esiste un ulteriore gruppo di formule (di minore importanza) riguardanti i prodotti di \cos e \sin ; provare a ricavarle, senza doverle mandare a memoria, può essere un utile esercizio.

Dalle formule di addizione, tenuto conto delle proprietà di simmetria, si possono ottenere le *formule di sottrazione*.

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) = \\ &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Analogamente si ricava

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Dalle formule di addizione e di sottrazione, con qualche passaggio di natura algebrica, si ottengono le *formule di Werner*.

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2} (\sin(x + y) - \sin(x - y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))\end{aligned}$$

La prima, ad esempio, si ottiene immediatamente, sommando membro a membro

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \dots \\ \cos(x - y) &= \dots\end{aligned}$$

10.7 Funzione \tan

A partire dalle funzioni \cos e \sin , si definisce una nuova funzione, denominata *tangente*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio di \tan è dato da

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

Osserviamo che

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$$

al variare di $k \in \mathbf{Z}$. Pertanto l'insieme di definizione della funzione tangente può essere rappresentato al modo seguente

$$\dots \cup (-3\pi/2, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \dots$$

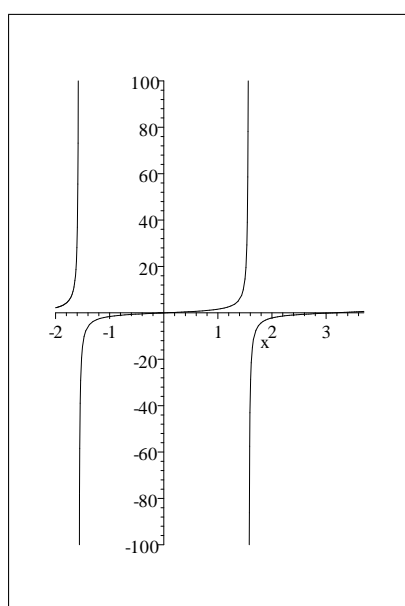
Ottenuto l'insieme di definizione, possiamo passare allo studio di periodicità e simmetria, che otterremo a partire dalle corrispondenti proprietà di \cos e \sin :

$$\begin{aligned}\tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \\ \tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x\end{aligned}$$

Dunque la funzione tangente è periodica di periodo π , dispari.

Si può dimostrare, infine, che la funzione \tan ammette tutti i valori $y \in \mathbf{R}$.

Riportiamo anche il grafico



$y = \tan x$

Infine dai valori notevoli di \cos e \sin ricaviamo i valori notevoli di \tan

x	$\tan x$
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$

Esercizio 10.10 *Provare ad ottenere la formula di duplicazione*

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Dobbiamo osservare che si tratta di una uguaglianza condizionata, nel senso che i valori di x per cui ha senso il primo membro sono diversi da quelli per cui ha senso il secondo. In questi casi l'uguaglianza si ritiene vera per i valori di x per cui hanno senso ambo i membri.

10.7.1 Funzione arctan

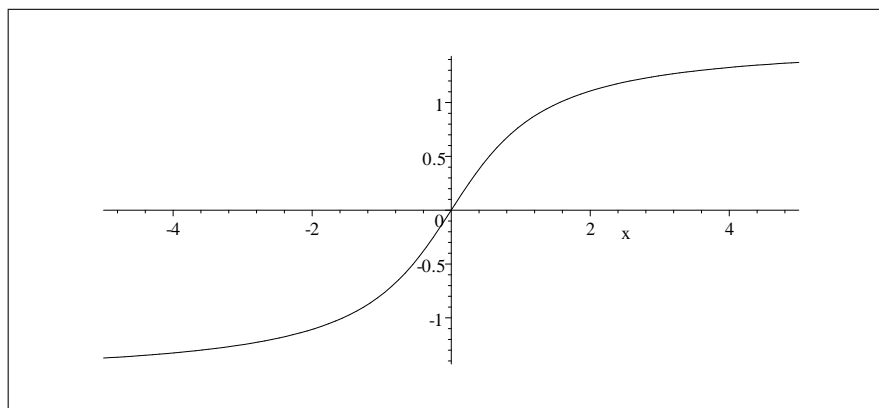
La restrizione

$$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$$

è strettamente crescente, bigettiva; chiameremo $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallo di invertibilità di \tan .

La funzione inversa di questa restrizione prende il nome di *arcotangente*

$$\arctan : \mathbf{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$



10.7.2 Formule parametriche

Ai fini della risoluzione degli esercizi possono essere molto utili le seguenti formule

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ \tan x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

La terza formula è una semplice trascrizione della formula di duplicazione della tangente (oppure si ricava dalle prime due).

Ricavare le prime due formule è abbastanza semplice. Ad esempio, per la prima, dalla formula di duplicazione del coseno e la relazione fondamentale si ottiene

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Dividendo per $\cos^2 \frac{x}{2}$ si giunge alla conclusione.

Nelle due formule () dobbiamo notare che il primo membro è definito per ogni $x \in \mathbf{R}$ ma non si può dire altrettanto del secondo membro: così come per la (), si tratta di uguaglianze condizionate.