

Capitolo 103

Polinomi

103.1 Generalità

Si definisce *polinomio in un'indeterminata a coefficienti reali* un'espressione formale del tipo

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_ix^i \end{aligned}$$

essendo $a_i \in \mathbf{R}$.

In altri termini un polinomio è univocamente individuato da una famiglia finita di *coefficienti*

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Ovviamente possiamo anche pensare ad una famiglia infinita (successione)

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

in cui tutti i termini da un certo indice in poi siano uguali a 0.

L'indice n che individua l'ultimo coefficiente diverso da 0 prende il nome di *grado del polinomio*, il corrispondente coefficiente a_n prende il nome di *coefficiente direttivo*.

Il grado del polinomio $P(x)$ si denota con $\deg P(x)$.

Dobbiamo notare subito che ciascun polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ (inteso come espressione formale) si può identificare con la corrispondente *funzione polinomiale*

$$\begin{aligned} P &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ P(x) &= \sum_{i=0}^n a_ix^i \end{aligned}$$

L'identificazione tra polinomi e funzioni polinomiali viene formalizzata nel seguente teorema, noto anche come *Principio di identità dei polinomi*.

Teorema 103.1 *Siano assegnati due polinomi (a coefficienti reali)*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ P_2(x) &= \sum_{i=0}^m b_i x^i \end{aligned}$$

le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) $P_1(x) = P_2(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (uguaglianza delle funzioni polinomiali);
- b) $n = m$ e $a_i = b_i$ per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ (uguaglianza dei polinomi).

L'implicazione **b)** \Rightarrow **a)** è ovvia. L'implicazione non ovvia **a)** \Rightarrow **b)** vale in \mathbf{R} ed in tutti i campi infiniti e si deduce dal Teorema di Ruffini che vedremo in seguito.

L'insieme dei polinomi (nel nostro caso a coefficienti reali) viene denotato con $\mathbf{R}[x]$.

103.2 Operazioni tra polinomi

Le funzioni polinomiali possono essere sommate e moltiplicate al pari di due qualsiasi funzioni reali di variabile reale. Tenuto conto delle proprietà delle potenze, quella che si ottiene è ancora una funzione polinomiale.

Esempio 103.2 ...

A partire da questa osservazione, sull'insieme dei polinomi $\mathbf{R}[x]$ si ritengono definite due leggi di composizione interna e si osserva che sono verificati gli assiomi che caratterizzano gli anelli.

Abbiamo anche una proposizione sul grado ottenuto nelle operazioni.

Proposizione 103.3 *Assegnati due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$, risulta quanto segue*

$$\begin{aligned} \deg(P_1(x) + P_2(x)) &\leq \max\{\deg P_1(x), \deg P_2(x)\}, \\ \deg(P_1(x) \cdot P_2(x)) &= \deg P_1(x) + \deg P_2(x). \end{aligned}$$

103.2.1 Divisione di polinomi

Assegnati due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$ vogliamo dare un significato alla divisione di $P_1(x)$ per $P_2(x)$, lo facciamo attraverso un teorema analogo a quello che dovrebbe essere noto per gli interi.

Teorema 103.4 *Assegnati due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$, se $P_2(x) \neq 0$ esistono e sono univocamente determinati due polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_2(x)Q(x) + R(x) \\ \deg R(x) &< \deg P_2(x). \end{aligned}$$

I polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ si dicono rispettivamente *quoziente* e *resto*.

Esempio 103.5 ...

Definizione 103.6 Il polinomio $P_1(x)$ si dice *divisibile* per $P_2(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x).$$

103.2.2 Divisione per $x - \alpha$

Assegnati un polinomio $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ed $\alpha \in \mathbf{R}$, in base al Teorema ... esistono e sono univocamente determinati

$$\begin{aligned} Q(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \\ r &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$

tali che

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r.$$

Si può dimostrare che i coefficienti b_i ed r sono dati da

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ &\dots \\ b_0 &= a_1 + \alpha b_1 \\ r &= a_0 + \alpha b_0 \end{aligned}$$

Le formule precedenti sono sintetizzate in uno schema ben noto

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \alpha b_{n-1} & \dots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & r \end{array}$$

Esempio 103.7 Vogliamo effettuare la divisione di $P(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1$ per $x - 1/3$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1/3 & & 1 & 0 & -1/3 \\ \hline & 3 & 0 & -1 & -4/3 \end{array}$$

Quindi il quoziente ed il resto sono dati rispettivamente da

$$\begin{aligned} Q(x) &= 3x^2 - 1, \\ r &= -4/3. \end{aligned}$$

Poichè $r \neq 0$ possiamo concludere che $P(x)$ non è divisibile per $x - 1/3$.

Osservazione 103.8 Dalla relazione (...) si deduce che $P(\alpha) = r$. Questo ha interessanti conseguenze: se vogliamo calcolare $P(\alpha)$, è più conveniente adoperare lo schema della divisione ed ottenere il resto, rispetto a sostituire α nella funzione polinomiale ed effettuare le operazioni (nel primo caso effettuiamo al più $n - 1$ moltiplicazioni, nel secondo caso $n(n + 1)/2$ moltiplicazioni).

Esempio 103.9 Assegnato $P(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2$, vogliamo calcolare $P(2)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \end{array}$$

Pertanto $P(2) = r = 10$.

103.2.3 Polinomi irriducibili

Le analogie tra polinomi ed interi non si fermano al Teorema sulla divisione, esiste anche una nozione in qualche modo analoga a quella di numero primo.

Definizione 103.10 Un polinomio $P(x)$ (di grado ≥ 1) si dice irriducibile se, per ogni coppia di polinomi $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$, da $P(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ consegue che $Q_1(x)$ o $Q_2(x)$ è una costante.

Teorema 103.11 (di fattorizzazione unica) Ogni polinomio $P(x)$ si scompone nel prodotto di polinomi irriducibili. La scomposizione è unica a meno di permutazioni (e costanti moltiplicative).

Osservazione 103.12 La nozione di polinomio irriducibile dipende dal campo in cui si considerano i coefficienti; ad esempio $P(x) = x^2 - 2$ è irriducibile su \mathbf{Q} ma è riducibile su \mathbf{R}

$$P(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Nel campo \mathbf{R} sussiste la seguente caratterizzazione.

Proposizione 103.13 Un polinomio $P(x)$ è irriducibile su \mathbf{R} se e solo se $P(x)$ è di primo grado

$$P(x) = ax + b$$

oppure $P(x)$ è di secondo grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

con

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

103.3 Radici

Sia $P(x)$ un polinomio (a coefficienti reali) di grado $n \geq 1$.

Definizione 103.14 Un numero reale α si dice radice di P se risulta $P(\alpha) = 0$, ossia se il valore della funzione polinomiale associata a P calcolata in α è uguale a 0.

Esempio 103.15 Consideriamo i polinomi

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 2x - 1 \\ P_2(x) &= x^2 + 1 \\ P_3(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che $P_1(x)$ ammette la radice $1/2$; il polinomio $P_2(x)$ non ammette alcuna radice (reale), infatti $x^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Il polinomio $P_3(x)$ ammette le radici ± 1 .

Sull'esistenza e non esistenza di radici torneremo alla fine del paragrafo.

Teorema 103.16 (di Ruffini) *Il numero reale α è radice del polinomio P se e solo se P è divisibile per $(x - \alpha)$, ossia esiste un polinomio $P_1(x)$ tale che*

$$P(x) = (x - \alpha)P_1(x).$$

Se $\alpha \in \mathbf{R}$ è una radice di P , in base al Teorema di Ruffini, esiste $P_1(x)$ tale che valga (...).

Se a sua volta $P_1(\alpha) = 0$, per lo stesso teorema, si ha che $P_1(x)$ è divisibile per $x - \alpha$ e quindi

$$P_1(x) = (x - \alpha)P_2(x).$$

Dunque, sostituendo in (...)

$$P(x) = (x - \alpha)^2 P_2(x).$$

Ovviamente passiamo a calcolare $P_2(\alpha)$ ed eventualmente continuiamo a scomporre; il processo si arresterà sicuramente entro n passi.

Questa osservazione giustifica la seguente definizione.

Definizione 103.17 *Si dice che α è una radice di molteplicità $m \geq 1$ se risulta*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \alpha)^m P_m(x), \\ P_m(\alpha) &\neq 0. \end{aligned}$$

La radice si dice semplice (risp. multipla) se ha molteplicità 1 (risp. > 1).

Dalla (...) e dalla proprietà sul grado del prodotto si deduce che per ciascuna radice α la molteplicità m_α è minore o al più uguale ad n . In realtà sussiste un risultato più preciso.

Proposizione 103.18 *Il polinomio $P(x)$ (di grado $n \geq 1$) ammette al più n radici, contate con la loro molteplicità.*

103.3.1 Radici complesse

Assegnato un polinomio $P(x)$ a coefficienti reali, ci si limita a considerare radici reali qualora sia prevalente l'interesse per la funzione polinomiale (da \mathbf{R} in \mathbf{R}); in questo caso la nozione di molteplicità può essere irrilevante. Se invece prevale il punto di vista algebrico-formale, poiché $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, possiamo anche considerare le radici di $P(x)$ in \mathbf{C} .

A questo proposito è utile ricordare almeno due proprietà.

Proposizione 103.19 *Se un polinomio $P(x)$ a coefficienti reali ammette la radice complessa α , ammette anche la radice complessa coniugata $\bar{\alpha}$.*

Teorema 103.20 *Sia $P(x)$ un polinomio (a coefficienti reali o complessi) di grado $n \geq 1$. Allora $P(x)$ ammette esattamente n radici (reali o complesse), contate con la loro molteplicità.*

Quest'ultimo teorema è noto anche come *Teorema Fondamentale dell'Algebra*.

Da queste proprietà si traggono utili indicazioni: ad esempio un polinomio di secondo grado a coefficienti reali non potrà avere una radice reale ed una radice complessa. In generale la differenza tra il grado di un polinomio a coefficienti reali ed il numero di soluzioni reali (contate con la loro molteplicità) sarà sempre un numero pari.

Capitolo 104

Equazioni algebriche

104.1 Generalità

Se $P(x)$ è un polinomio, l'uguaglianza

$$P(x) = 0$$

prende il nome di *equazione algebrica (intera)*.

Le soluzioni di tale equazioni coincidono con le radici del polinomio P .

Il grado del polinomio è detto anche *grado dell'equazione*. In base al Teorema ... le equazioni algebriche ammettono un numero di soluzioni minore o al più uguale al grado.

Osservazione 104.1 *In generale si definisce equazione algebrica un'equazione che coinvolge solo funzioni polinomiali o razionali (rapporto di funzioni polinomiali). Ad esempio l'equazione*

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

prende il nome di equazione algebrica fratta.

104.2 Equazioni di I e di II grado

Lo studio delle equazioni viene svolto seguendo il grado.

Nel Capitolo ... abbiamo risolto l'equazione di primo grado

$$ax + b = 0$$

ottenendo $x = -b/a$.

Osservazione 104.2 *Fissati i coefficienti $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, l'equazione ammette soluzione unica, coerentemente con la teoria sulle radici del polinomio. Talvolta si chiede di determinare i valori di $x \in \mathbf{R}$ per i quali è soddisfatta la (), in corrispondenza di coefficienti a e b che non sono fissati ma, a loro volta, dipendono da altri parametri. In questo caso si effettua una discussione:*

- se $a \neq 0$, abbiamo la soluzione unica $x = -b/a$;

- se $a = 0$ e $b \neq 0$, non esiste alcuna soluzione;
- se $a = b = 0$, allora la () è verificata per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$.

Esempio 104.3 Si risolva l'equazione

$$(k+1)x = k^2 + 1$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Se $k+1 \neq 0$, ossia se $k \neq -1$, abbiamo la soluzione unica $x = (k^2+1)/(k+1)$.

Se $k = -1$, l'equazione assume la forma

$$0 \cdot x = 2$$

che evidentemente non è verificata per alcun $x \in \mathbf{R}$.

Ora consideriamo l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Tale equazione è equivalente a

$$4a^2x^2 + 4axb + 4ac = 0$$

che, a sua volta equivale a

$$4a^2x^2 + 4axb + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Poniamo

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Tale quantità prende il nome di *determinante*.

Dunque l'equazione () si trascrive al modo seguente

$$(2ax + b)^2 - \Delta = 0.$$

Ora dobbiamo distinguere tre casi.

- Se $\Delta < 0$, abbiamo $-\Delta > 0$. D'altra parte $(2ax + b)^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e pertanto

$$(2ax + b)^2 - \Delta > 0$$

dunque l'equazione non ammette alcuna soluzione.

- Se $\Delta = 0$, l'equazione si riduce a

$$(2ax + b)^2 = 0$$

e sappiamo che questa equazione equivale a

$$2ax + b = 0$$

ossia

$$x = -b/2a.$$

Dunque l'equazione ammette un'unica soluzione.

- Se $\Delta > 0$, possiamo scrivere

$$\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2.$$

Dunque l'equazione si riduce a

$$(2ax + b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = 0$$

e dunque

$$(2ax + b + \sqrt{\Delta})(2ax + b - \sqrt{\Delta}) = 0.$$

Questo rappresenta il primo importante esempio di fattorizzazione: ci siamo ricondotti a due equazioni di primo grado

$$\begin{aligned} 2ax + b + \sqrt{\Delta} &= 0 \\ 2ax + b - \sqrt{\Delta} &= 0 \end{aligned}$$

con le rispettive soluzioni

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Dunque in questo terzo caso le soluzioni sono due, generalmente scritte al modo seguente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Osservazione 104.4 Anche per equazioni di secondo grado si può immaginare che i coefficienti a, b, c dipendano da parametri e quindi si rende necessario aprire la discussione dei diversi casi che si possono presentare.

Osservazione 104.5 Sono note a livello specialistico formule risolutive per le equazioni di III e IV grado. Non esiste, anzi è stato dimostrato che non può esistere, una formula risolutiva per equazioni di grado superiore al IV.

104.2.1 Osservazioni sull'equazione di II grado

Si consideri l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se abbiamo $a > 0$ (e ci si può sempre ricondurre a questa situazione), allora

$$c < 0 \implies \Delta > 0.$$

Inoltre, denotate con $x_{1,2}$ le radici (reali o complesse) risulta

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}. \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Esercizio 104.6 *Assegnata l'equazione*

$$x^2 - m(x - 2) - 1 = 0$$

con un parametro $m \in \mathbf{R}$, possiamo porre diversi tipi di questioni.

Per quali valori di m $x = 0$ è soluzione?

Per quali valori di m le soluzioni sono opposte?

Per quali valori di m non ci sono soluzioni?

Per quali valori di m abbiamo due soluzioni strettamente positive?

Può essere utile richiamare la regola di Cartesio...

104.3 Equazioni algebriche a coefficienti interi

Proposizione 104.7 *Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Sia $q = m/n \in \mathbf{Q}$ una radice di P . Allora necessariamente

- m è un divisore di a_0 ;
- n è un divisore di a_n .

Esempio 104.8 *Consideriamo il polinomio*

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

I divisori di 4 sono 1, 2, 4; i divisori di 6 sono 1, 2, 3, 6. Pertanto le possibili radici razionali del polinomio sono

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{6} \right\}.$$

Nel caso di equazioni algebriche a coefficienti interi la Proposizione ... ci fornisce l'elenco delle possibili radici razionali; per ciascun numero razionale q in elenco dovremo testare se è radice o meno.

Come si diceva sopra (Osservazione ...) conviene effettuare il test tramite la divisione per $x - q$, ossia tramite lo schema (). Tale schema non solo ci dice se un certo q è radice o meno; in caso affermativo, lo schema ci fornisce anche i coefficienti del polinomio $P_1(x)$ per cui risulta

$$P(x) = (x - q) P_1(x).$$

Dunque per determinare le altre radici di $P(x)$ dovremo risolvere un'equazione di grado inferiore.

Esempio 104.9 *Consideriamo l'equazione*

$$6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$$

Già disponiamo dell'elenco delle possibili radici razionali (vedi Esempio ...) del polinomio $P(x)$ che definisce l'equazione, quindi iniziamo a testarle.

- 1 non è radice di P ;
- -1 è radice, infatti

$$\begin{array}{c|cccc|c} -1 & 6 & 5 & -9 & -4 & 4 \\ & & -6 & 1 & 8 & -4 \\ \hline & 6 & -1 & -8 & 4 & 0 \end{array}$$

Quindi possiamo scrivere

$$6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = (x+1)(6x^3 - x^2 - 8x + 4).$$

e ci siamo ricondotti a trovare le radici del polinomio

$$P_1(x) = 6x^3 - x^2 - 8x + 4.$$

Le possibili radici razionali sono ovviamente quelle già elencate sopra e già sappiamo che 1 non è radice. Ricominciamo a testare.

- -1 non è radice di $P_1(x)$ (il test è necessario in quanto -1 potrebbe essere radice multipla di $P(x)$);
- $1/2$ non è radice di P_1 ;

e via di seguito per le altre radici in elenco, fino a trovare che

- $2/3$ è radice di P_1 , infatti

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2/3 & 6 & -1 & -8 & 4 \\ & & 4 & 2 & -4 \\ \hline & 6 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 6x^3 - x^2 - 8x + 4 &= (x - 2/3)(6x^2 + 3x - 6) \\ &= (3x - 2)(2x^2 + x - 2) \end{aligned}$$

Ora ci conviene risolvere direttamente l'equazione di secondo grado

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

ed otteniamo le ultime due radici (non razionali)

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Capitolo 105

Problemi di geometria analitica

105.1 La parabola

Il grafico della funzione

$$f_0(x) = x^2$$

gode di interessanti proprietà geometriche.

Anzitutto ricordiamo una definizione tradizionale.

Definizione 105.1 *Si definisce parabola l'insieme (o luogo geometrico) dei punti aventi uguale distanza da un punto (detto fuoco) e da una retta (detta direttrice).*

La retta passante per il fuoco ed ortogonale alla bisettrice prende il nome di asse, l'intersezione dell'asse con la parabola stessa prende il nome di vertice.

Osservazione 105.2 *Si può dimostrare che l'asse della parabola costituisce un asse di simmetria.*

Consideriamo il punto F_0 di coordinate $(0, 1/4)$ e la retta d_0 di equazione $y = -1/4$. E' facile verificare che, per ogni punto P appartenente al grafico di f_0 , la distanza di P da F_0 è uguale alla distanza di P da d_0 . Si può provare che questa proprietà caratterizza i punti del grafico di f_0 , dunque il grafico di f_0 è una parabola. L'asse è dato dall'asse delle ordinate $y = 0$ ed il vertice coincide con l'origine $(0, 0)$.

In generale, assegnata la funzione polinomiale

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

si può dimostrare che il corrispondente grafico è una parabola. Posto, come al solito,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

il fuoco è dato dal punto F di coordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a} \right),$$

la direttrice è la retta d di equazione

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}.$$

L'asse ed il vertice della parabola sono dati rispettivamente dalla retta di equazione

$$x = -\frac{b}{2a}$$

e dal punto di coordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Allo scopo di risolvere in maniera semplice le disequazioni di secondo grado può essere utile avere delle indicazioni per tracciare in maniera immediata il grafico della funzione f .

Infatti, partendo dal grafico di

$$f_0(x) = x^2,$$

1. si effettua una traslazione orizzontale

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

2. si effettua una traslazione verticale

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

3. si effettua una dilatazione (con eventuale ribaltamento) e si ottiene

$$\begin{aligned} a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= \\ ax^2 + bx + c &= f(x) \end{aligned}$$

Possiamo reinterpretare la discussione svolta a proposito dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sappiamo che la funzione $f_0(x) = x^2$ ha un grafico convesso, limitato inferiormente, che tocca in un sol punto l'asse delle x .

1. La traslazione orizzontale non cambia convessità, limitatezza e numero di intersezioni con l'asse delle x .
2. Se $\Delta \neq 0$ si presenta una traslazione verticale di $-\Delta/4a^2$; essa, in ogni caso, non cambia convessità e limitatezza, tuttavia
 - se $\Delta > 0$, il grafico trasla in basso e si producono due intersezioni con l'asse delle x ;

- se $\Delta < 0$, il grafico trasla in alto e si perde l'intersezione con l'asse delle x .
3. L'ultima trasformazione (dilatazione verticale) non cambia il numero di intersezioni (che dunque viene a dipendere solo da Δ). La dilatazione è significativa solo se $a < 0$ in quanto produce un ribaltamento del grafico: la funzione diventa concava.

In definitiva, se vogliamo riassumere:

- la convessità dipende dal coefficiente a :

$$a > 0 \implies f \text{ convessa,}$$

$$a < 0 \implies f \text{ concava;}$$

- la posizione rispetto all'asse delle ascisse dipende da Δ :

$$\Delta > 0 \implies 2 \text{ intersezioni,}$$

$$\Delta = 0 \implies 1 \text{ intersezione (tangenza),}$$

$$\Delta < 0 \implies \text{nessuna intersezione.}$$

105.2 Problemi di II grado

Capitolo 106

Disequazioni razionali e sviluppi