

Capitolo 3

Potenze e radici

3.1 Funzioni potenza

Fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, rimane immediatamente definita la funzione potenza n -sima

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che per $n = 1$ abbiamo la funzione identica che già conosciamo.

In fase preliminare studiamo questa funzione nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Si dimostra anzitutto il seguente teorema.

Proposizione 3.1 *La funzione f su $[0, +\infty)$ è strettamente crescente.*

Sappiamo che $f(0) = 0$, quindi dal teorema precedente consegue che, per ogni $x \geq 0$ abbiamo $f(x) \geq 0$ e pertanto

$$f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$$

Sussiste inoltre il seguente teorema.

Proposizione 3.2 *Per ogni $y \geq 0$ esiste $x \geq 0$ tale che $x^n = y$.*

In forza della stretta monotonia l'elemento x previsto dal teorema è unico.

Dal punto di vista insiemistico il teorema precedente equivale a dire che

$$[0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$$

e pertanto

$$f([0, +\infty)) = [0, +\infty).$$

Dunque la funzione

$$f : x \in [0, +\infty) \mapsto x^n \in [0, +\infty)$$

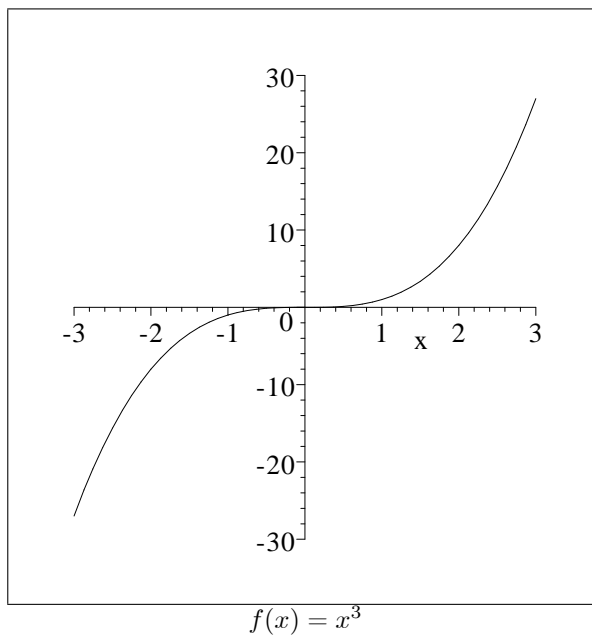
è una bigezione.

Per passare al grafico dobbiamo distinguere due casi.

3.1.1 n dispari

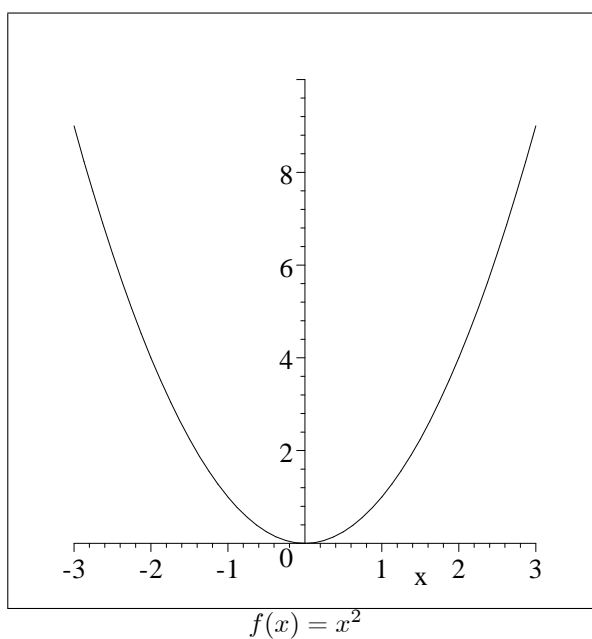
Se n è dispari, la funzione potenza è dispari e si realizza una bigezione da \mathbf{R} in \mathbf{R} .

Abbiamo un grafico di questo tipo.



3.1.2 n pari

In questo caso abbiamo una funzione pari. Il grafico è di questo tipo

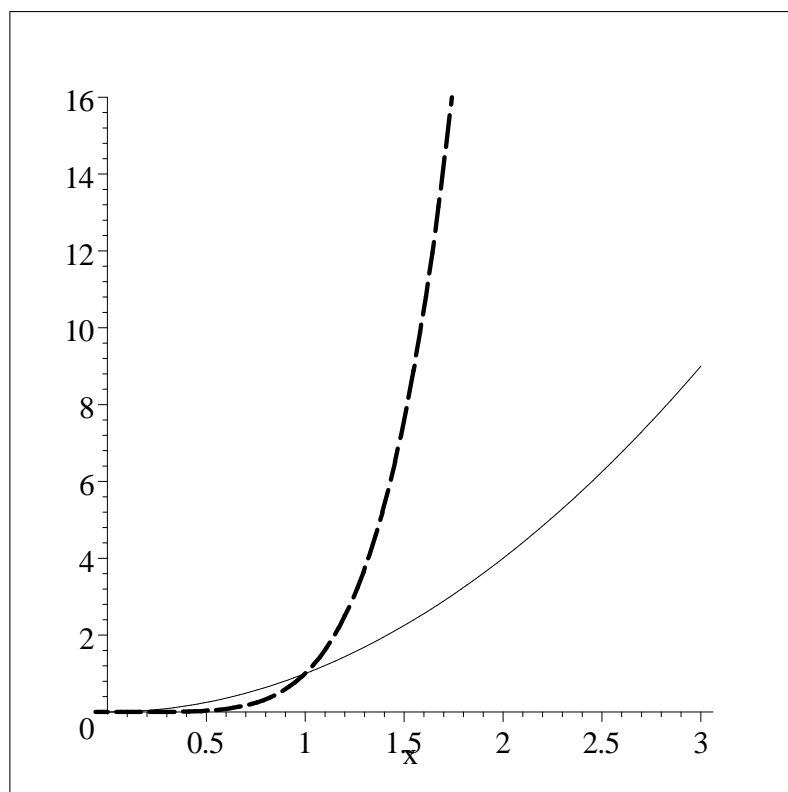


3.1.3 Confronto tra potenze diverse

Quale che sia $n \in \mathbf{N}$, pari o dispari, il grafico di $p_n(x) = x^n$ ristretto a $[0, +\infty)$ presenta le medesime proprietà qualitative:

- $p_n(0) = 0, p_n(1) = 1$;
- funzione crescente, convessa, non limitata superiormente.

E' interessante confrontare i grafici: osserviamo ad esempio i grafici di x^2 (linea continua sottile) e x^5 (linea spessa tratteggiata).



Dunque al crescere di n si osserva:

- un maggiore schiacciamento del grafico in $[0, 1)$;
- una crescita più ripida in $(1, +\infty)$.

3.2 Radice n -sima

A livello elementare si dice che $\sqrt[n]{x}$ è un numero tale che, elevato alla potenza n -sima, ci restituisce il valore x . In base a questa definizione potremmo affermare (sbagliando!!!) che

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Per noi la radice n -sima è una funzione.

Se la radice è definita come una funzione immediatamente consegue che essa assume un unico valore; inoltre dovremo delimitare la scelta di x .

Come per la funzione potenza dobbiamo distinguere due casi.

3.2.1 n dispari

La definizione è più semplice. La funzione potenza

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto x^n \in \mathbf{R}$$

è bigettiva, dunque la funzione radice n -sima è la funzione inversa della funzione potenza n -sima

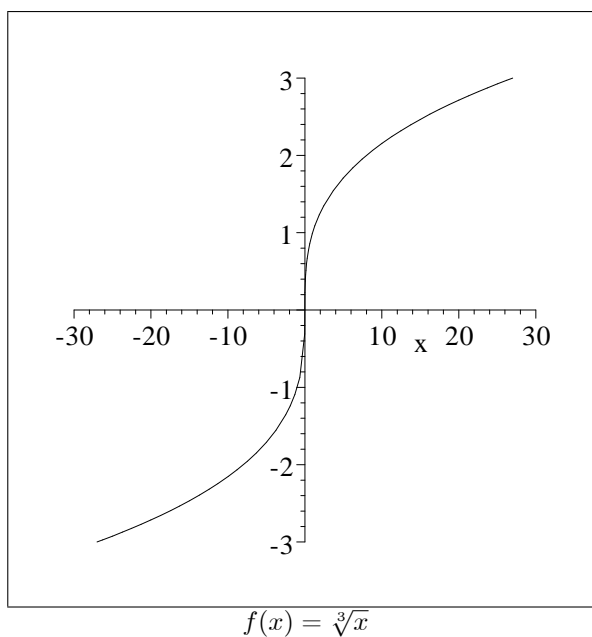
$$x \in \mathbf{R} \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbf{R}$$

Se proviamo a ricordare la definizione di funzione inversa, abbiamo, per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

Osserviamo che la prima di queste formule è quella che dà origine alla definizione elementare di radice.

Al pari della funzione corrispondente funzione potenza, la radice ad esponente dispari è definita in \mathbf{R} ed è strettamente monotona crescente, dispari.



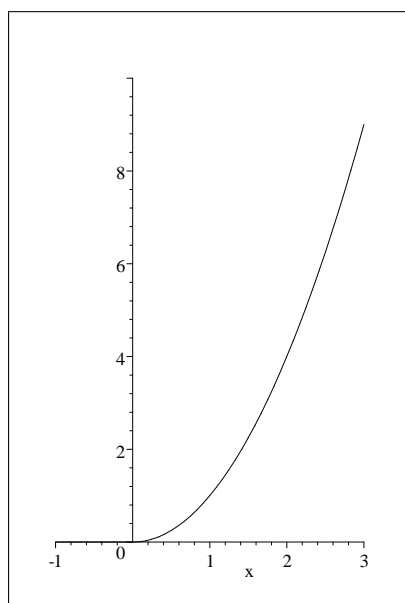
3.2.2 n pari

In questo caso la funzione potenza è pari quindi non invertibile.

Tuttavia sappiamo che la funzione

$$f : x \in [0, +\infty) \mapsto x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile.


 $f(x) = x^2$ ristretta a $[0, +\infty)$

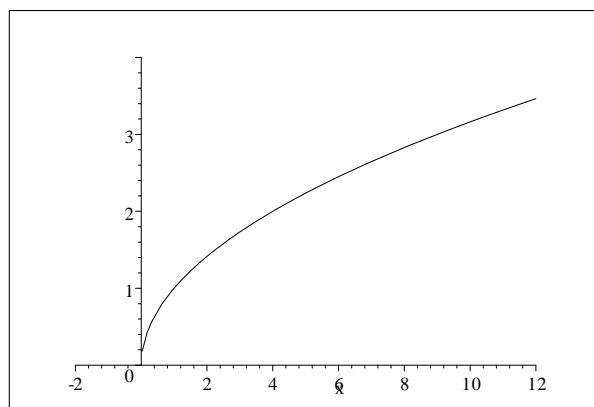
Possiamo definire la radice n -sima come inversa di questa funzione.

$$x \in [0, +\infty) \mapsto \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$$

Formalmente valgono le medesime proprietà viste sopra, a patto di assumere $x \in [0, +\infty)$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Al pari della restrizione che vi ha dato origine, la funzione radice è strettamente monotona crescente.


 $f(x) = \sqrt{x}$

3.2.3 Avvertenze sulle radici

- Assumendo $n = 2$ ed $n = 3$ come prototipo dei numeri pari e dispari possiamo sintetizzare la definizione delle radici come segue

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{-4}$ non esiste	$\sqrt[3]{-8} = -2$

- Il fatto di aver ammesso radici ad indice dispari con radicando negativo comporta una particolare attenzione nella semplificazione a cui forse si era abituati. Ad esempio

$$\sqrt[6]{x^2} \neq \sqrt[3]{x}$$

Per convincersi si può pensare al seguente esempio: se $x = -8$ abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{(-8)^2} &= \sqrt[6]{64} = 2 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2\end{aligned}$$

Le semplificazioni consuete continuano a rimanere valide nel caso di radici con argomento positivo.

- Restiamo in tema di semplificazioni. Nel caso di n pari, abbiamo già osservato che, in base alla definizione, per ogni $x \geq 0$

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

In realtà, il primo membro di tale uguaglianza ha senso per ogni $x \in \mathbf{R}$, in quanto $x^n \geq 0$. Sussiste allora la seguente relazione: per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Infatti, ancora per convincersi

$$\begin{aligned}\sqrt{2^2} &= \sqrt{4} = 2 = |2| \\ \sqrt{(-2)^2} &= \sqrt{4} = 2 = |-2|\end{aligned}$$

3.3 Equazioni elementari

Il più semplice esempio di equazione elementare è dato

$$x^n = b$$

Si tratta evidentemente di particolari equazioni algebriche, talvolta denominate *binomie*. Osserviamo che per $n \geq 5$ queste equazioni sfuggono all'approccio algebrico, mentre con l'approccio analitico la sostanziale differenza è tra n pari ed n dispari.

Proposizione 3.3 *Se n è dispari, per ogni $b \in \mathbf{R}$ l'equazione () ammette la soluzione unica $x = \sqrt[n]{b}$.*

Proposizione 3.4 *Se n è pari, l'esistenza ed il numero di soluzioni di () dipende da $b \in \mathbf{R}$.*

Se $b < 0$, l'equazione () non ammette alcuna soluzione.

Se $b = 0$, l'equazione () ammette come unica soluzione $x = 0$.

Se $b > 0$, l'equazione () ammette due soluzioni opposte $x = \pm \sqrt[n]{b}$.

Analogha distinzione tra n pari e dispari ritroviamo per l'equazione

$$\sqrt[n]{x} = b.$$

Proposizione 3.5 *Se n è dispari, per ogni $b \in \mathbf{R}$ l'equazione $()$ ammette la soluzione unica $x = b^n$.*

Proposizione 3.6 *Se n è pari, l'esistenza ed il numero di soluzioni di $()$ dipende da $b \in \mathbf{R}$.*

Se $b < 0$, l'equazione $()$ non ammette alcuna soluzione.

Se $b \geq 0$, l'equazione $()$ ammette come unica soluzione $x = b^n$.