

Capitolo 2

Funzioni reali

2.1 Prime definizioni ed esempi

In questo capitolo ci occupiamo delle funzioni reali di variabile reale, ossia delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, essendo $A \subset \mathbf{R}$.

Se f è una funzione reale di variabile reale, per ogni $x \in A$ la coppia $(x, f(x))$, stante l'identificazione introdotta in precedenza, individua un punto del piano cartesiano.

In generale l'insieme di coppie $(x, f(x))$, al variare di $x \in A$, si identifica con un sottoinsieme del piano cartesiano, che prende il nome di *grafico*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}.$$

2.1.1 Esempi

funzione costante

Fissato $c \in \mathbf{R}$, possiamo considerare la funzione costante

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) &= c \end{aligned}$$

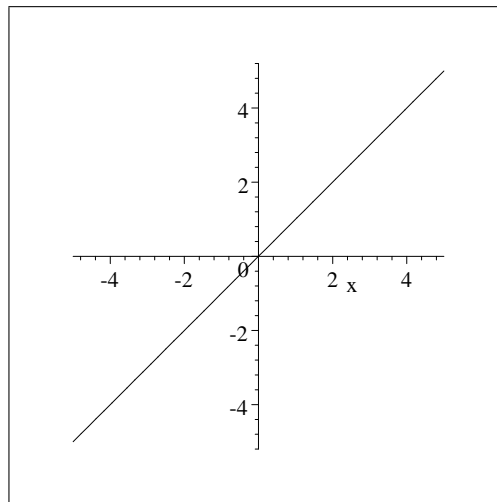
il grafico coincide con la retta di equazione $y = c$ (parallela all'asse delle ascisse).

funzione identica

La funzione identica

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

ammette come grafico la retta di equazione $y = x$, ossia la I bisettrice, quella che taglia I e III quadrante.



funzione $1/x$

Sappiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, esiste ed è unico il reciproco (o inverso) di x .

In modo naturale si definisce la funzione

$$\begin{aligned}\phi &: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \\ \phi(x) &= 1/x\end{aligned}$$

In base alla definizione di grafico, abbiamo

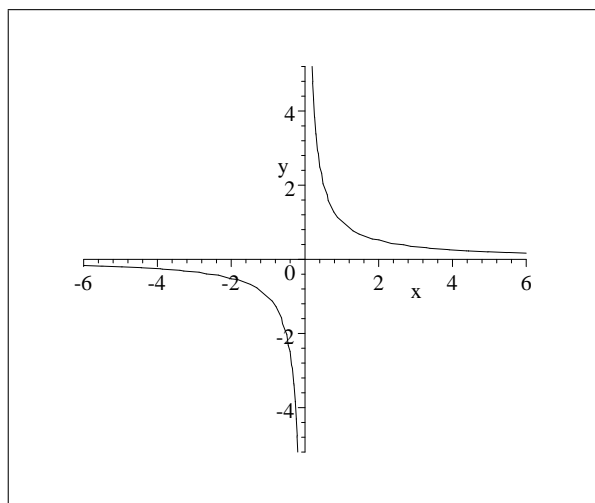
$$G_\phi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y = 1/x\}$$

o, equivalentemente

$$G_\phi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Vale la pena di osservare che la condizione $x \neq 0$ viene “inclusa” nella condizione $xy = 1$, infatti se due numeri hanno prodotto diverso da 0 sono necessariamente entrambi diversi da 0.

Dunque il grafico della funzione $\phi(x) = 1/x$ coincide con l’iperbole di equazione $xy = 1$, una conica (curva algebrica del II ordine), le cui proprietà geometriche vengono approfondite in Geometria Analitica



Funzione valore assoluto

La funzione *valore assoluto* è definita come segue

$$\begin{aligned} |\cdot| &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ |x| &= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$|2| = 2$$

in quanto $2 \geq 0$. Mentre

$$|-3| = -(-3) = 3$$

in quanto $-3 \leq 0$.

E' assolutamente sbagliato dire che il valore assoluto di x è il numero privato del segno. Ad esempio è errato scrivere

$$|-a| = a$$

Infatti a può essere anche un numero negativo.

Ecco alcune proprietà del valore assoluto.

- Per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0 \\ |x| &= |-x| \end{aligned}$$

Dunque la funzione valore assoluto assume solo valori positivi.

- Equazioni e disequazioni. Assegnato $a \geq 0$ risulta

- $|x| = a$ se e solo se $x = \pm a$;
- $|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$.

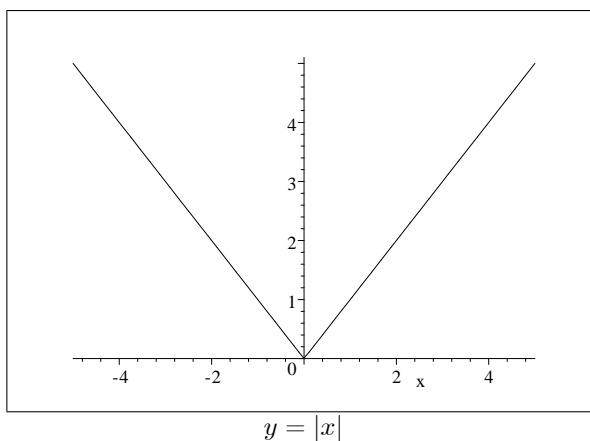
- Disuguaglianza triangolare: per ogni $x, y \in \mathbf{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} |5 + (-3)| &= |2| = 2 \\ |5| + |-3| &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Concludiamo con il grafico



Sottolineiamo che il grafico aiuta a ricordare la risoluzione di equazioni e disequazioni già segnalata sopra.

funzione parte intera

Passiamo a presentare un'altra funzione “strana”: la *parte intera*

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Fissato $x \in \mathbf{R}$ si definisce parte intera di x il più grande intero $k \in \mathbf{Z}$ minore o uguale ad x . In formule

$$\lfloor x \rfloor = k$$

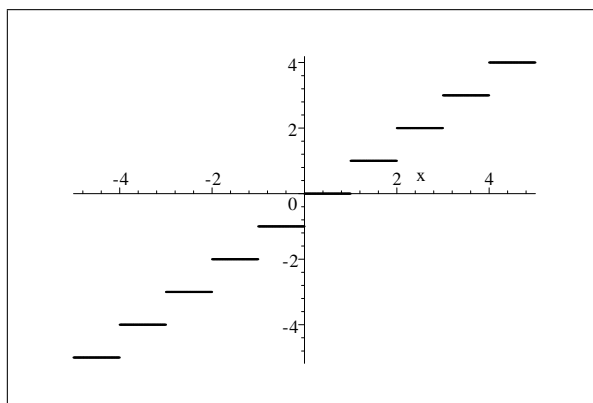
se e solo se

$$k \leq x < k + 1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \lfloor \pi \rfloor &= 3 \\ \lfloor 2 \rfloor &= 2 \\ \lfloor -0.5 \rfloor &= -1 \end{aligned}$$

Il grafico della funzione parte intera non è una “linea continua”, ma è costituito da infiniti “gradini”, di lunghezza 1, chiusi a sinistra ed aperti a destra.



Può essere un utile esercizio dimostrare che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$[x + 1] = [x] + 1.$$

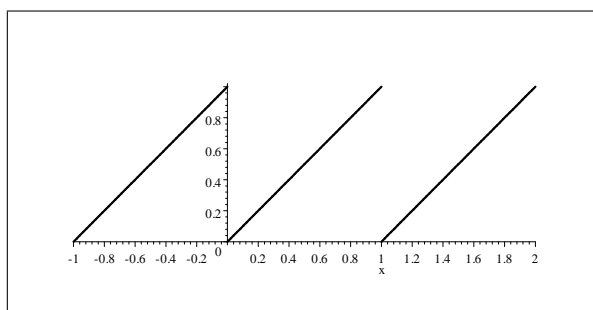
Accanto alla funzione parte intera possiamo considerare la funzione *mantissa*, o “parte frazionaria”:

$$\begin{aligned} m &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ m(x) &= x - [x]. \end{aligned}$$

Si dimostra che, per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$0 \leq m(x) < 1$$

Il grafico della funzione mantissa è dato da



Osservazione 2.1 Noi abbiamo definito la parte intera di $x \in \mathbf{R}$ come il più grande intero minore o uguale ad x . In maniera perfettamente analoga si potrebbe anche considerare il più piccolo intero maggiore o uguale ad x . Ovviamente dovremmo adottare un altro simbolo

$$[\cdot] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}.$$

e si avrebbe

$$\begin{aligned} [\pi] &= 4 \\ [2] &= 2 \\ [-0.5] &= 0 \end{aligned}$$

In presenza di due possibili definizioni di parte intera, il simbolo $[x]$ usato su alcuni testi potrebbe rivelarsi ambiguo.

2.1.2 Osservazioni sui grafici

La proprietà fondamentale che identifica i grafici di funzione si esprime come segue:

- una retta parallela all'asse delle ordinate interseca il grafico se e solo se interseca l'asse delle ascisse in un punto $x_0 \in A$;
- l'intersezione è ridotta ad un sol punto.

Generalmente si dice che un grafico di funzione è una curva: in realtà possono esistere grafici (funzione parte intera e funzione mantissa) abbastanza diversi dalla comune idea di curva.

Viceversa non tutte le curve nel piano sono grafici di funzione (ad esempio la circonferenza).

In particolare i grafici delle funzioni ingettive godono di una ulteriore proprietà:

- ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico al più in un punto.

Come si è detto inizialmente le funzioni ingettive possono tranquillamente essere considerate invertibili. Nel caso delle funzioni reali di variabile reale, il grafico della funzione inversa si ottiene effettuando la simmetria rispetto alla I bisettrice, quella che taglia I e III quadrante.

2.2 Simmetrie

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Supponiamo che il *dominio* A sia *simmetrico* rispetto all'origine, nel senso che

$$x \in A \implies -x \in A.$$

In questo caso ha senso confrontare i valori che la funzione assume nei punti x e $-x$.

La *funzione* f si dice *pari* se risulta

$$f(-x) = f(x).$$

In questo caso il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Esempi di funzioni pari sono la funzione costante e la funzione valore assoluto.

La *funzione* f si dice *dispari* se risulta

$$f(-x) = -f(x).$$

In questo caso il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'origine.

Esempi di funzioni dispari sono la funzione identica e la funzione $1/x$.

Supponiamo ora che il *dominio* A sia *periodico* di periodo $T > 0$, ossia

$$x \in A \implies x \pm T \in A.$$

La funzione f si dice *periodica* di periodo T se, per ogni $x \in A$

$$f(x + T) = f(x)$$

In questo caso il grafico di f si ripete periodicamente su ogni intervallo di ampiezza T .

Un esempio di funzione periodica (di periodo 1) è dato dalla funzione mantissa.

E' facile osservare che se f è periodica di periodo T , allora f è anche di periodo nT per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Questo rende interessante la ricerca del cosiddetto periodo minimo di f .

Osserviamo, infine, che le funzioni pari e le funzioni periodiche non sono ingettive.

2.3 Monotonia

Siano $A \subset \mathbf{R}$ e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. La funzione f si dice

1. *monotona crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2);$$

2. *monotona decrescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$

$$f(x_1) \geq f(x_2);$$

3. *monotona strettamente crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$

$$f(x_1) < f(x_2);$$

4. *monotona strettamente decrescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$

$$f(x_1) > f(x_2).$$

La funzione f si dice *monotona* se vale una qualsiasi delle quattro precedenti condizioni.

La funzione f si dice *strettamente monotona* se vale la condizione 2. o la condizione 4.

Evidentemente ogni funzione strettamente monotona è anche monotona. Non vale il viceversa, nel senso che esistono funzioni monotone ma non strettamente, si veda ad esempio la funzione parte intera.

Ricordiamo, infine, il teorema fondamentale sulle funzioni monotone.

Teorema 2.2 *Ogni funzione strettamente monotona è ingettiva, quindi può considerarsi invertibile. La funzione inversa è strettamente monotona, dello stesso tono.*

2.4 Convessità

.....

2.5 Estremi e limitatezza

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$.

Definizione 2.3 Il punto $x_0 \in A$ si dice di minimo (risp. massimo) assoluto per f se, per ogni $x \in A$ risulta

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq f(x) \\ (\text{risp. } f(x) &\leq f(x_0)) \end{aligned}$$

Il valore $f(x_0)$ prende il nome di valore minimo (risp. massimo) assoluto di f .

Definizione 2.4 La funzione f si dice limitata dal basso (risp. dall'alto) se esiste $m \in \mathbf{R}$ (risp. $M \in \mathbf{R}$) tale che per ogni $x \in A$ risulta

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \\ (\text{risp. } f(x) &\leq M) \end{aligned}$$

Tale m (risp. M) prende il nome di minorante (risp. maggiorante) di f .

E' del tutto evidente che se f ammette minimo (risp. massimo) assoluto, allora f è limitata dal basso (risp. dall'alto). Tuttavia esistono casi di funzioni limitate dal basso (risp. dall'alto) che non ammettono minimo (risp. massimo) assoluto.

E' anche evidente che se f ammette un minorante (risp. maggiorante), ne ammette infiniti. In questo modo si viene a creare la seguente situazione:

- da una parte abbiamo l'insieme dei valori della funzione (insieme che abbiamo denominato codominio);
- dall'altra abbiamo l'insieme dei minoranti (risp. maggioranti).

Dall'assioma di completezza consegue che esiste un unico elemento che separa questi due insiemi: il più grande (risp. piccolo) di tutti i minoranti (risp. maggioranti). Tale elemento prende il nome di *estremo inferiore* (risp. *superiore*) di f e si denota con il simbolo

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} f(x) \\ (\text{risp. } \sup_{x \in A} f(x)) \end{aligned}$$

E' ovvio, infine, che, se una funzione ammette minimo (risp. massimo) assoluto, il valore minimo (risp. massimo) assoluto coincide con l'estremo inferiore (risp. superiore). In questo senso l'estremo inferiore (risp. superiore) rappresenta un surrogato del valore minimo (risp. massimo).

Se la funzione f non è limitata dal basso (risp. dall'alto), si pone

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} f(x) &= -\infty \\ (\text{risp. } \sup_{x \in A} f(x) &= +\infty). \end{aligned}$$

Definizione 2.5 Una funzione si dice limitata se è limitata sia dal basso che dall'alto.

2.6 Algebra delle funzioni

Fino a questo momento ci siamo occupati delle più semplici proprietà attribuibili ad una singola funzione reale di variabile reale. Nel seguito vedremo come si possono “generare” nuove funzioni con operazioni algebriche e di composizione. Oltre le funzioni riportate all’inizio del capitolo, la pratica matematica ha individuato un piccolo insieme di funzioni, dette appunto *elementari*, che costituiscono gli ingredienti base con cui definire quasi tutte le funzioni utilizzate nella matematica di base. Delle funzioni elementari ci occuperemo con la dovuta attenzione nei capitoli seguenti.

Siano assegnate due funzioni reali di variabile reale

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbf{R} \\ g &: B \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$.

Se i domini di f e g non sono disgiunti, ossia se $A \cap B \neq \emptyset$, rimangono immediatamente definite due nuove funzioni

$$\begin{aligned} f + g &: A \cap B \rightarrow \mathbf{R} \\ f \cdot g &: A \cap B \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

Si pone, infatti, per ogni $x \in A \cap B$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Parleremo di somma (risp. prodotto) di f e g per indicare la funzione somma (risp. prodotto) $f + g$ (risp. $f \cdot g$).

E’ evidente che, come caso particolare del prodotto, possiamo considerare il prodotto per una costante: cf .

- Un esempio di grande importanza è dato da

$$f(x) = mx + q.$$

Una funzione di questo tipo prende il nome di *funzione lineare affine*. La costante m (ovviamente $\neq 0$) prende il nome di *coefficiente angolare*; si dimostri che la funzione è crescente se e solo se $m > 0$. La costante q prende il nome di *intercetta*, infatti rappresenta l’ordinata del punto in cui il grafico intercetta l’asse delle ordinate. Si può dimostrare che il grafico di f è una retta.

- La generalizzazione dell’esempio precedente è dato dalle *funzioni polinomiali*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

ottenute sommando un numero finito di funzioni del tipo ax^n .

2.6.1 Operazioni e proprietà qualitative

Alcune caratteristiche qualitative si trasmettono attraverso le operazioni. La dimostrazione di queste proprietà può costituire un utile esercizio.

Proposizione 2.6 *La somma di due funzioni pari (resp. dispari) è essa stessa pari (dispari).*

Proposizione 2.7 *Il prodotto di due funzioni aventi la stessa parità è pari; il prodotto di due funzioni aventi parità diversa è dispari.*

Come si generalizza questa proprietà al prodotto di n funzioni?

Proposizione 2.8 *Se f e g sono funzioni periodiche con lo stesso periodo T , allora anche $f + g$ e $f \cdot g$ sono periodiche di periodo T .*

Osserviamo che non si può stabilire a priori se si tratta del periodo minimo.

Proposizione 2.9 *Siano f e g sono funzioni periodiche di periodo rispettivamente T_1 e T_2 . Supponiamo inoltre che esistano $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tali che*

$$n_1 T_1 = n_2 T_2$$

Allora sia f che g sono periodiche di periodo

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

e quindi tali risultano anche $f + g$ e $f \cdot g$.

Osservazione 2.10 *Osserviamo che la condizione (...) equivale a dire che il rapporto dei periodi è un numero razionale. Non è facile dimostrare che questa condizione è anche necessaria.*

Proposizione 2.11 *La somma di due funzioni monotone dello stesso tono è essa stessa monotona.*

Proposizione 2.12 *La somma di due funzioni convesse (resp. concave) è essa stessa convessa (concava).*

Proposizione 2.13 *La somma di due funzioni limitate (dal basso e/o dall'alto) è essa stessa limitata (dal basso e/o dall'alto).*

Non esistono analoghi risultati per il prodotto.

2.7 Funzione composta

Siano assegnate le funzioni

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbf{R} \\ g &: B \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$.

Sappiamo che la funzione composta

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow \mathbf{R} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

ha senso se

$$f(A) \subset B \quad (2.1)$$

ossia se per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \in B$.

Qualora la condizione (...) non sia verificata ha ancora senso parlare di funzione composta, a patto di restringere il dominio. Precisamente si considera

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

e si considera

$$g \circ f : A_1 \rightarrow \mathbf{R}$$

Un esempio di questa situazione viene fornito nel sottoparagrafo seguente, per introdurre la funzione reciproca.

La dimostrazione delle proprietà seguenti può costituire un utile esercizio.

Proposizione 2.14 *Componendo due funzioni simmetriche, se una delle due funzioni presenti nella composizione è pari, allora la funzione composta è pari; se entrambe le funzioni sono dispari, allora la funzione composta è dispari.*

Proposizione 2.15 *La funzione composta di due funzioni monotone dello stesso tono è monotona crescente. La funzione composta di due funzioni monotone di tono opposto è monotona decrescente.*

E' ancora un utile esercizio chiedersi: come si generalizzano queste proprietà alla composizione di tre o più funzioni?

2.7.1 Funzione reciproca e rapporti

Sia assegnata una funzione reale di variabile reale $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Vogliamo introdurre la funzione reciproca

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)} \quad (2.2)$$

Evidentemente si tratta della funzione composta di f con la funzione $\phi(x) = 1/x$.

Valgono ora le considerazioni svolte sulla funzione composta.

- Se per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \neq 0$, allora la funzione reciproca (...) è definita per ogni $x \in A$.
- Altrimenti dobbiamo operare una restrizione, precisamente la funzione reciproca sarà definita sul sottoinsieme

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}.$$

E' importante ora una precisazione terminologica.

- Se x è un numero reale, i termini “inverso di x ” e “reciproco di x ” sono sostanzialmente sinonimi.
- Se f è una funzione reale,
 - quando parliamo di “inversa di f ” intendiamo la funzione inversa nel senso della composizione, ammesso che esista; ricordiamo che l’inversa si denota con f^{-1} ;
 - la funzione reciproca è quella introdotta in questo paragrafo, denotata con $1/f$.

Esempio 2.16 Se consideriamo la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, la funzione inversa è data da $\sqrt[3]{x}$, definita ancora per ogni $x \in \mathbf{R}$, la funzione reciproca è data da $1/x^3$ definita per $x \neq 0$.

Osservazione 2.17 In forza della Proposizione ..., poichè la funzione $\phi(x) = 1/x$ è dispari, se f è pari (risp. dispari) la funzione reciproca è pari (risp. dispari).

Assegnate le funzioni

$$\begin{aligned} f & : A \rightarrow \mathbf{R} \\ g & : B \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$, possiamo ora introdurre il rapporto f/g , da intendersi ovviamente come prodotto di f per la reciproca di g .

Abbiamo

$$f/g : A \cap B_1 \rightarrow \mathbf{R}$$

dove

$$B_1 = \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}.$$

Per ogni $x \in A \cap B_1$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Possiamo ricordare che, secondo una classica terminologia, i rapporti di funzioni polinomiali

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

prendono il nome di *funzioni razionali*.

Esempio 2.18 Consideriamo due funzioni polinomiali

$$\begin{aligned} p(x) & = 3x + 2 \\ p_1(x) & = 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

Entrambe sono definite su tutto \mathbf{R} . La funzione reciproca di p_1

$$\frac{1}{p_1}(x) = \frac{1}{3x^2 + 2}$$

è definita ancora su tutto \mathbf{R} , mentre la funzione reciproca di p

$$\frac{1}{p}(x) = \frac{1}{3x+2}$$

è definita in $\mathbf{R} \setminus \{-2/3\}$.

La funzione p introdotta sopra è invertibile. La sua inversa, ben diversa dalla reciproca, è data da

$$p^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-2).$$

2.8 Operazioni sui grafici

Sia assegnata $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ di cui supponiamo di conoscere il grafico. Per particolari funzioni g il grafico si può ricavare direttamente dal grafico di f .

Se	il grafico di g si ottiene tramite
$g(x) = f(x) + c$	traslazione verticale (verso l'alto se $c > 0$)
$g(x) = cf(x), \quad c > 0$	dilatazione (o contrazione) verticale
$g(x) = -f(x)$	ribaltamento rispetto all'asse x
$g(x) = f(x - c)$	traslazione orizzontale (verso destra se $c > 0$)
$g(x) = f(x/c), \quad c > 0$	dilatazione (o contrazione) orizzontale
$g(x) = f(-x)$	ribaltamento rispetto all'asse y
$g(x) = f(x) $	ribalt. risp. all'asse x delle parti negative

Ovviamente queste operazioni possono essere applicate consecutivamente.

Esempio 2.19 Il grafico della funzione $g(x) = 3f(x-2)$ si ottiene dal grafico della funzione f applicando prima una traslazione orizzontale (verso destra di 2 unità) e poi una dilatazione verticale (di un fattore 3).

Osservazione 2.20 Un esempio importante di applicazione di queste “operazioni” viene fornito nell'Appendice D, dove si studia il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2.9 Equazioni

Si definisce *equazione in una incognita* (reale) una uguaglianza del tipo

$$g(x) = h(x)$$

essendo $g : A \rightarrow \mathbf{R}, h : B \rightarrow \mathbf{R}$.

Si definisce *soluzione* di (...) ogni $x \in A \cap B$ tale che l'uguaglianza sia verificata.

Osservazione 2.21 Tradizionalmente le equazioni verificate per ogni $x \in \mathbf{R}$ vengono denominate identità.

Se consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f & : A \cap B \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) & = g(x) - h(x) \end{aligned}$$

l'equazione

$$f(x) = 0$$

è equivalente all'equazione (...)

Ricordiamo che due equazioni si dicono *equivalenti* se le soluzioni di una sono tutte e sole le soluzioni dell'altra.

Le soluzioni di (...) sono detti anche zeri della funzione f .

Sussiste un'ovvia *interpretazione grafica*.

- Risolvere la () vuol dire determinare in quali punti il grafico di g incrocia il grafico di h .
- Risolvere la () vuol dire determinare in quali intervalli (o punti isolati) il grafico di f incrocia l'asse delle ascisse $y = 0$.

2.9.1 Fattorizzazione

La forma (...) delle equazioni è quasi sempre la più conveniente. In particolare essa ci consente di avvalerci di una tipica strategia risolutiva: la fattorizzazione.

Assegnata l'equazione (...), se si riesce a scrivere

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

possiamo considerare due nuove equazioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

e, in forza della legge di annullamento del prodotto, avremo

$$\{\text{soluzioni di (...)}\} = \{\text{soluzioni di (...)}\} \cup \{\text{soluzioni di (...)}\}$$

Ovviamente lo stesso discorso vale per un numero superiore di fattori.

2.9.2 Equazioni elementari

Accanto alle equazioni algebriche, rivestono particolare importanza le cosiddette *equazioni elementari*

$$\varphi(x) = b,$$

con particolare enfasi al caso in cui φ sia una funzione elementare.

Proposizione 2.22 *Se $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}$ è invertibile con inversa ψ e $b \in \varphi(A)$, allora () ha soluzione unica*

$$x = \psi(b).$$

Purtroppo dobbiamo osservare che non tutte le funzioni elementari sono invertibili, a causa di parità e/o periodicità. In concreto noi otterremo le soluzioni partendo dal grafico φ , dato per noto, e studiando le intersezioni con la retta orizzontale $y = b$.

2.10 Disequazioni

La teoria delle disequazioni è in qualche modo parallela a quella delle equazioni.

Si definisce *disequazione* una delle seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} g(x) &\leq h(x) \\ g(x) &< h(x) \end{aligned}$$

essendo $g : A \rightarrow \mathbf{R}$, $h : B \rightarrow \mathbf{R}$. Si definisce *soluzione* ogni $x \in A \cap B$ tale che l'uguaglianza sia verificata.

Se consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f &: A \cap B \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) &= h(x) - g(x) \end{aligned}$$

le disequazioni

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) \\ 0 &< f(x) \end{aligned}$$

sono rispettivamente equivalenti alle disequazioni (...) e (...)

Ovviamente sussiste un'*interpretazione grafica*:

- Risolvere la () e la () vuol dire determinare in quali intervalli (o punti isolati) il grafico di g si trova al di sotto del grafico di h ; nel caso della () si includono i punti di contatto, nel caso della () si escludono.
- Risolvere la () e la () vuol dire determinare in quali intervalli (o punti isolati) il grafico di f giace nel semipiano positivo $y \geq 0$; nel caso della () si includono i punti di contatto, nel caso della () si escludono.

Anche per le disequazioni, la forma (...) e (...) consente di avvalerci di una conveniente strategia risolutiva. Se si riesce a scrivere

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

sarà sufficiente studiare il segno di ciascuno dei due fattori $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ed applicare la ben nota regola dei segni. Ovviamente lo stesso discorso vale per un numero superiore di fattori.

Possiamo anche considerare le seguenti *disequazioni elementari*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq b, \\ \varphi(x) &< b, \\ b &\leq \varphi(x), \\ b &< \varphi(x). \end{aligned}$$

Tuttavia non si riesce a dare un'unica formula risolutiva (in altre parole non conviene avvalersi di formule mnemoniche); è molto più semplice ottenere la soluzione partendo dal grafico φ , che deve essere noto, ed osservando come il grafico è collocato rispetto alla retta orizzontale $y = b$.