

# Capitolo 101

## Richiami di algebra

### 101.1 Regole di calcolo

Ecco alcune conseguenze degli assiomi.

**Proposizione 101.1** *Per ogni  $a \in \mathbf{R}$*

$$-(-a) = a.$$

*Se  $a \neq 0$  risulta anche*

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

**Proposizione 101.2** *Per ogni  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$*

$$\frac{1}{-a} = -\left(\frac{1}{a}\right).$$

**Proposizione 101.3** *Per ogni  $a \in \mathbf{R}$*

$$a \cdot 0 = 0$$

Dalla proposizione precedente consegue che non può esistere l'inverso di 0.

**Proposizione 101.4 (Legge di annullamento del prodotto)** *Per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$*

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0.$$

**Proposizione 101.5** *Per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$*

$$(-a)b = a(-b) = -ab$$

*e quindi*

$$(-a)(-b) = ab.$$

**Osservazione 101.6** *Dal punto di vista formale abbiamo la ben nota regola dei segni; in realtà dobbiamo ricordare che  $-x$  non denota un numero negativo, ma l'opposto di  $x$ , quale che sia  $x \in \mathbf{R}$ .*

## 101.2 Manipolazione di uguaglianze

**Proposizione 101.7** (manipolazione di uguaglianze) *Per ogni  $a, b, c \in \mathbf{R}$*

$$a + b = c \iff a = c - b.$$

*Inoltre, se  $b \neq 0$ ,*

$$a \cdot b = c \iff a = c/b.$$

Si tratta dei cosiddetti principi di ....:

- si può ...
- si può ....

**Osservazione 101.8** *Questi principi sono alla base della risoluzione dell'equazione algebrica di primo grado*

$$ax + b = 0.$$

*Supponendo ovviamente  $a \neq 0$ , la soluzione di () è unica  $x = -b/a$ .*

Allo stesso modo si dimostrano alcune regole di semplificazione:

$$\begin{aligned} a \pm b = c \pm b &\implies a = c \\ ab = cb, b \neq 0 &\implies a = c \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{b} &\implies a = c \end{aligned}$$

## 101.3 Proprietà delle disuguaglianze

**Proposizione 101.9** *Per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$*

$$\begin{aligned} a + b \leq c &\iff a \leq c - b; \\ a \leq b + c &\iff a - c \leq b; \end{aligned}$$

*In particolare*

$$\begin{aligned} 0 &\leq a \implies -a \leq 0 \\ a &\leq 0 \implies 0 \leq -a. \end{aligned}$$

Si tratta di un principio di risoluzione delle disequazioni: si può ....

**Dimostrazione.** Basta sommare ad ambo i membri  $-b$  (risp  $-a$ ). ■

Introduciamo una notazione: per ogni  $x \in \mathbf{R}$  poniamo

$$x^2 = x \cdot x.$$

**Proposizione 101.10** *Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  risulta  $x^2 \geq 0$ . Inoltre  $x^2 = 0$  se e solo se  $x = 0$ .*

**Proposizione 101.11** *Se  $a > 0$  allora  $1/a > 0$ .*

*Consegue che*

$$a \leq b, c > 0 \implies \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Con questa proposizione si completa il secondo principio di risoluzione delle disequazioni: si possono moltiplicare o dividere ambo i membri di una disequazione ...

**Proposizione 101.12** *Per ogni  $a, b, c \in \mathbf{R}$*

$$a \leq b \wedge c \leq 0 \implies ac \geq bc$$

**Dimostrazione.** Abbiamo  $-c \geq 0$ . Per la ( ) abbiamo

$$a(-c) \leq b(-c)$$

e quindi

$$-ac \leq -bc$$

da cui segue la tesi. ■

**Proposizione 101.13** *Se  $a < 0$  allora  $1/a < 0$ .*

*Consegue che*

$$a \leq b, c < 0 \implies \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

La .. e la .. esprimono il terzo principio di risoluzione delle disequazioni: si possono moltiplicare o dividere ambo i membri di una disuguaglianza ... per un numero ....

**Corollario 101.14** *Per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$  risulta*

$$\begin{aligned} 0 < a \leq b &\implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\ a < 0 < b &\implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b} \\ a \leq b < 0 &\implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0 \end{aligned}$$

Una regola di semplificazione è ovvia

$$a \pm b \leq c \pm b \implies a \leq c$$

(basta sommare ad ambo i membri  $\mp b$ ).

Sussistono anche altre regole di semplificazione:

$$\begin{aligned} ab \leq cb, b > 0 &\implies a \leq c \\ \frac{a}{b} \leq \frac{c}{b}, b > 0 &\implies a \leq c \\ ab \leq cb, b < 0 &\implies a \geq c \\ \frac{a}{b} \leq \frac{c}{b}, b < 0 &\implies a \geq c \end{aligned}$$

**Proposizione 101.15 (somma di disuguaglianze)** *Per ogni  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$*

$$a \leq b \wedge c \leq d \implies a + c \leq b + d.$$

Ovviamente questa proposizione si generalizza alla somma di più disuguaglianze.

**Proposizione 101.16 (somma di numeri positivi)** *Per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$*

$$0 < a \wedge 0 \leq b \implies 0 < a + b.$$

*Consegue che*

$$0 \leq a \wedge 0 \leq b \wedge a + b = 0 \implies a = b = 0.$$

Ovviamente questa proposizione si generalizza al caso di più addendi.

## Capitolo 102

# Potenze ad esponente intero

### 102.1 Potenza ad esponente naturale

Siano  $x \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ .

Ricordiamo che con il simbolo  $x^n$  denotiamo la potenza  $n$ -sima di  $x$ , definita come il prodotto di  $n$  fattori tutti uguali ad  $x$ .

Banali esempi di potenze sono

$$\begin{aligned}2^5 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \\3^2 &= 3 \cdot 3 = 9 \\(-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27\end{aligned}$$

Ovviamente abbiamo

$$x^1 = x.$$

Si conviene, inoltre, di porre

$$x^0 = 1.$$

Se si volesse formalizzare questa definizione, si dovrebbe fare ricorso ad una formula per ricorrenza

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^n = x^{n-1} \cdot x \end{cases}$$

Cosa vuol dire *definizione per ricorrenza*? Si tratta di definire un certo oggetto matematico dipendente da  $n \in \mathbf{N}$ . Anzitutto si definisce questo oggetto per  $n = 0$ , esattamente come abbiamo fatto sopra; quindi la definizione dell'oggetto con indice  $n$  fa uso dello stesso oggetto con indice  $n - 1$ .

Vediamo tutto questo nella definizione di potenza.

$$\begin{aligned}3^4 &= 3^3 \cdot 3 \\3^3 &= 3^2 \cdot 3 \\3^2 &= 3^1 \cdot 3 \\3^1 &= 3^0 \cdot 3 \\3^0 &= 1\end{aligned}$$

Tenendo conto di queste uguaglianze abbiamo

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3^3 \cdot 3 = (3^2 \cdot 3) \cdot 3 = ((3^1 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 = \\ &= (((3^0 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 = (((1 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 = \\ &= ((3 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 = 81 \end{aligned}$$

esattamente come ci hanno insegnato alla scuola elementare.

### 102.1.1 Esponenti negativi

Il passo successivo è quello di definire la potenza con un esponente intero negativo. Come accade in una costruzione ordinata, questo nuovo oggetto viene definito utilizzando gli oggetti già noti.

Se  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $k < 0$ , conveniamo di porre

$$x^k = \left(\frac{1}{x}\right)^{-k}.$$

Osserviamo che al primo membro abbiamo l'oggetto nuovo, che dobbiamo definire,

- la potenza con esponente negativo  $k$ .

A secondo membro compaiono due oggetti noti:

- $1/x$ , inverso di  $x$ .
- la potenza con l'esponente positivo  $-k$ .

Ovviamente stiamo supponendo l'esistenza dell'inverso, quindi la definizione data sopra richiede una condizione aggiuntiva

$$x \neq 0.$$

Passiamo a qualche esempio

$$\begin{aligned} 7^{-2} &= (7^{-1})^{-(-2)} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \\ (-4)^{-2} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Alla luce della definizione che abbiamo dato, il simbolo  $x^{-1}$  viene ad assumere un doppio significato, ovviamente coincidente

- inverso di  $x$  rispetto alla moltiplicazione;
- $x$  elevato alla potenza  $-1$ .

## 102.2 Proprietà formali

Possiamo ricordare alcune proprietà delle potenze, anch'esse note dagli studi precedenti.

$$\begin{aligned}x^{m_1} \cdot x^{m_2} &= x^{m_1+m_2} \\(x^{m_1})^{m_2} &= x^{m_1 \cdot m_2} \\(x \cdot y)^m &= x^m \cdot y^m\end{aligned}$$

ove  $x, y \in \mathbf{R}$  e  $m, m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ . Per dimostrarle, dovremmo usare una tecnica detta di *induzione*.

Inoltre si prova che se  $x \neq 0$  e  $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}x^m &\neq 0 \\ \frac{1}{x^m} &= \left(\frac{1}{x}\right)^m = x^{-m},\end{aligned}$$

dove la proprietà (da dimostrare) è nella prima uguaglianza e, nella seconda, abbiamo semplicemente tenuto conto della definizione di potenza ad esponente negativo. Se ricordiamo che

$$\frac{1}{t} = t^{-1}$$

possiamo anche scrivere

$$(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m},$$

in analogia con ( ).

Questo suggerisce che queste le quattro proprietà (...) continuino a valere anche se consideriamo esponenti interi  $m, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ , con le opportune restrizioni sulle basi. Per brevità non le riscriviamo.

A queste proprietà daremo il nome di proprietà formali delle potenze, formali perché queste rimangono invariate anche se cambiamo l'insieme in cui possono variare basi ed esponenti, quindi cambiamo il significato attribuito ai simboli.

Queste proprietà vengono comunemente utilizzate nella semplificazione di espressioni monomie, ad esempio

$$\frac{6^m (x^4)^3}{2^m 3^2 x^7} = 3^{m-2} x^5.$$