

Capitolo 1

Numeri reali

Diamo per nota la conoscenza dei numeri interi. Quindi potremo considerare gli insiemi

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbf{N}^* &= \mathbf{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbf{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.\end{aligned}$$

Gli elementi di \mathbf{N} sono detti numeri (*interi*) *naturali*, gli elementi di \mathbf{Z} numeri *interi (relativi)*.

Sull'insieme \mathbf{Z} sono definite due operazioni (leggi di composizione interna), somma e prodotto, ed una relazione d'ordine.

1.1 Campo ordinato dei numeri reali

L'ambiente naturale per gli oggetti dell'Analisi matematica è l'insieme dei numeri reali, denotato con \mathbf{R} .

Sull'insieme \mathbf{R} sono definite due operazioni (leggi di composizione interna) ed una relazione d'ordine, che generalizzano le omonime strutture che noi conosciamo sull'insieme dei numeri naturali.

Assioma 1.1 *Proprietà associativa della somma*

Assioma 1.2 *Proprietà commutativa della somma*

Assioma 1.3 *Esistenza di 0 elemento neutro per la somma*

Assioma 1.4 *Esistenza dell'opposto*

Proposizione 1.5 *L'opposto di x è unico e si denota con $-x$.*

Per semplicità adottiamo la seguente notazione

$$a - b = a + (-b).$$

Dunque la sottrazione altro non è che la somma con l'opposto.

Assioma 1.6 *Proprietà associativa del prodotto*

Assioma 1.7 *Proprietà commutativa del prodotto*

Assioma 1.8 *Esistenza di 0 elemento neutro per il prodotto*

Assioma 1.9 *Proprietà distributiva*

Osservazione 1.10 *Dalla proprietà distributiva consegue che $x \cdot 0 = 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.*

Assioma 1.11 *Esistenza dell'inverso, per ogni $x \neq 0$.*

Proposizione 1.12 *L'inverso di x è unico e si denota con $1/x$.*

E' di uso comune la seguente notazione: se $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Parleremo di divisione intendendo la moltiplicazione per l'inverso. Chiameremo in breve

$$a/b$$

rapporto, a numeratore e b denominatore. Evidentemente si tratta di denominazioni convenzionali.

Poichè non esiste l'inverso di 0, non avrà senso la scrittura $a/0$.

Assiomi di relazione di totale ordine.

Poniamo, inoltre

$$a < b \iff a \leq b, a \neq b$$

$$a \geq b \iff b \leq a$$

$$a > b \iff b \leq a, b \neq a$$

Un numero $x \in \mathbf{R}$ si dice positivo (risp. negativo) se $x \geq 0$ (risp $x \leq 0$). Analogamente si parla di numeri strettamente positivi e negativi.

La relazione d'ordine è compatibile con la struttura algebrica.

Assioma 1.13 *Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$, risulta*

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z.$$

Assioma 1.14 *Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$, risulta*

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \implies x \cdot z \leq y \cdot z.$$

Concludiamo con un'importante definizione e con l'assioma tipico di \mathbf{R} .

Definizione 1.15 *Insiemi separati*

Assioma 1.16 (di completezza) *Tra due insiemi separati esiste sempre almeno un elemento di separazione.*

1.2 Sottocampo dei razionali

Nel corso degli studi precedenti tutti avranno avuto modo di incontrare un insieme numerico dotato della struttura di campo ordinato: si tratta dell'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali. Richiamiamo di seguito alcune definizioni per poi evidenziare la differenza sostanziale con l'insieme \mathbf{R} .

Il punto di partenza è dato dalle frazioni, oggetti del tipo

$$\frac{m}{n}$$

con $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}^*$.

Due frazioni m_1/n_1 e m_2/n_2 si dicono equivalenti quando

$$m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Definiamo numero razionale una classe di equivalenza di frazioni.

L'insieme dei numeri razionali si denota con \mathbf{Q} .

Per ogni $q \in \mathbf{Q}$ esistono infinite frazioni che rappresentano q . Usualmente noi scriveremo

$$q \in \mathbf{Q} \quad q = \frac{m}{n}$$

ossia identificheremo il numero razionale q con una frazione che lo rappresenta (per semplicità, quella ridotta ai minimi termini).

L'insieme \mathbf{Z} si considera incluso in \mathbf{Q} in quanto gli elementi $m \in \mathbf{Z}$ si identificano con le frazioni $m/1$.

Già conosciamo le operazioni con le frazioni

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \\ \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} \end{aligned}$$

Queste operazioni così definite passano al quoziente \mathbf{Q} , nel senso che: se m_1/n_1 è equivalente a k_1/i_1 e m_2/n_2 è equivalente a k_2/i_2 allora

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \text{ e' equivalente a } \frac{k_1}{i_1} + \frac{k_2}{i_2}$$

In questo senso si può parlare di somma e prodotto definite sull'insieme \mathbf{Q} .

Su \mathbf{Q} è definita anche una relazione di totale ordine, ereditata dalla relazione d'ordine su \mathbf{Z} . Tale relazione si definisce sulle frazioni e passa al quoziente

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 \leq m_2 n_1.$$

Come si anticipava (e si può facilmente verificare), dal punto di vista algebrico l'insieme \mathbf{Q} , con le due leggi di composizione interna e la relazione d'ordine, gode delle medesime proprietà enunciate per \mathbf{R} . La fondamentale differenza è rappresentata dall'assioma di completezza, tipico di \mathbf{R} e non verificato da \mathbf{Q} .

Proposizione 1.17 *Non esiste alcun numero razionale $q \in \mathbf{Q}$ tale che $q^2 = 2$.*

Proposizione 1.18 *Il campo ordinato \mathbf{Q} non verifica l'assioma di completezza.*

Dimostrazione. E' sufficiente esibire un esempio di due insiemi separati e tuttavia privi di elemento di separazione.

Consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \{q \in \mathbf{Q} \mid 0 \leq q, q^2 < 2\}, \\ B &= \{q \in \mathbf{Q} \mid 0 \leq q, 2 < q^2\}. \end{aligned}$$

Gli insiemi A e B sono non vuoti infatti $1 \in A$ e $2 \in B$. Inoltre tali insiemi sono separati; infatti, considerati $q_1 \in A$ e $q_2 \in B$, se risultasse

$$q_2 < q_1$$

avremmo anche

$$2 < q_2^2 < q_1^2 < 2.$$

Supponiamo per assurdo che A e B ammettano in \mathbf{Q} un elemento di separazione che denotiamo con \bar{q} . Tale \bar{q} sarà positivo in quanto compreso tra 1 e 2.

In forza della proposizione precedente non può essere $\bar{q}^2 = 2$, quindi si avrà $\bar{q}^2 < 2$ oppure $2 < \bar{q}^2$. Supponiamo $\bar{q}^2 < 2$.

Consideriamo ora

$$r = \frac{2(\bar{q} + 1)}{\bar{q} + 2} \in \mathbf{Q}$$

Abbiamo evidentemente $r \in \mathbf{Q}$ rimane da vedere se tale r appartiene ad A o a B . Abbiamo

$$r^2 = \frac{4(\bar{q} + 1)^2}{(\bar{q} + 2)^2}$$

e quindi

$$r^2 - 2 = \frac{2(\bar{q}^2 - 2)}{(\bar{q} + 2)^2} < 0.$$

Pertanto $r^2 < 2$ e dunque $r \in A$. Essendo \bar{q} elemento di separazione avremo

$$r \leq \bar{q}.$$

D'altra parte risulta

$$r - \bar{q} = \frac{2 - \bar{q}^2}{\bar{q} + 2} > 0$$

ossia

$$r > \bar{q}$$

in contraddizione con ().

Ad un analogo assurdo si perviene assumendo $\bar{q}^2 > 2$. Dunque non può esistere alcun elemento di separazione. ■

Così come \mathbf{Q} si considera un ampliamento di \mathbf{Z} , l'insieme \mathbf{R} viene considerato un'ampliamento di \mathbf{Q} ; quindi in definitiva risulta

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Osservazione 1.19 Vogliamo ricordare che esiste un ulteriore insieme numerico \mathbf{C} , costituito dai numeri complessi, che si può considerare come ampliamento di \mathbf{R} . L'insieme \mathbf{C} verifica gli assiomi di campo (da ... a ...) tuttavia non è possibile definire su \mathbf{C} una relazione d'ordine che risulti compatibile con le leggi di composizione interna

Riguardo la relazione tra \mathbf{Q} ed \mathbf{R} , si ha anche un risultato più preciso.

Proposizione 1.20 *Densità di \mathbf{Q} in \mathbf{R} .*

1.3 Numeri per esprimere lunghezze

Al di là dell'impostazione assiomatica e degli aspetti algebrici, la natura di \mathbf{R} come estensione di \mathbf{Q} e la rappresentazione dei numeri reali vengono chiarite da considerazioni di carattere geometrico.

Ricordiamo una definizione classica.

Definizione 1.21 *I segmenti s ed u si dicono commensurabili se esistono due numeri interi $m, n \in \mathbf{N}$ (con almeno $n \neq 0$) tali che n copie consecutive di s diano un segmento coincidente con m copie consecutive di u .*

In questo caso, se consideriamo il segmento u unità di misura, si dice che la lunghezza di s è espressa dal numero razionale m/n .

Una delle scoperte cruciali della scienza antica è che esistono segmenti incommensurabili, ossia non commensurabili tra loro.

Esempio 1.22 *Come conseguenza del Teorema di Pitagora e della Proposizione ... si può dimostrare che la diagonale di un quadrato non è commensurabile con il lato del quadrato stesso.*

Questa circostanza mostra l'insufficienza dei numeri razionali per esprimere lunghezze e dunque la necessità di ampliare l'insieme dei numeri.

Assumiamo ora un assioma non algebrico ma interpretativo: *fissato un segmento u come unità di misura, a ciascun segmento s si associa un unico numero reale positivo, detto lunghezza di s rispetto ad u .*

Osservazione 1.23 *Ovviamente se il segmento s è commensurabile con u , la lunghezza di s continua ad essere quella definita in precedenza; anche in questo senso \mathbf{R} è un ampliamento di \mathbf{Q} .*

La ben nota procedura di misurazione lascia intuire anche in quale modo potremo rappresentare un numero reale (razionale o no).

Anzitutto andiamo a contare quante volte u è contenuto in s ed otteniamo un intero. In generale u non sarà contenuto un numero intero di volte, dunque ci rimarrà un segmento s' di lunghezza inferiore ad u .

Ora dobbiamo scegliere un numero intero come base; a livello elementare si assume 10.

Andiamo a dividere u in dieci parti uguali, chiamiamo u' una di queste dieci parti e andiamo a contare quante volte u' è contenuto in s' ; otterremo un intero tra 0 e 9. Anche questa volta u' potrebbe non essere contenuto un numero intero di volte, dunque ci rimarrà un segmento s'' , di lunghezza inferiore ad u' .

Andiamo a dividere u' in dieci parti uguali e chiamiamo u'' una di queste dieci parti. Contiamo quante volte u'' è contenuto in s'' e otteniamo un intero tra 0 e 9.

E' chiaro che questa procedura può arrestarsi o, in teoria, può procedere indefinitamente.

Quindi, in base a questa procedura (teorica), ciascun numero reale, rappresentando una lunghezza, può essere espresso tramite un intero ed infinite cifre $d_i \in \{0, \dots, 9\}$.

1.4 Retta reale

L'adozione dei numeri reali per esprimere lunghezze consente di stabilire una bigezione tra una retta r e l'insieme dei numeri reali.

Anzitutto sulla retta r fissiamo un punto O ; dunque la retta r risulta suddivisa in due semirette.

Ora fissiamo sulla retta un secondo punto, distinto da O e denotato con U ; indichiamo con r_+ (risp. r_-) la semiretta che contiene (risp. non contiene) U .

Convenzionalmente si traccia una retta r orizzontale e si colloca U a destra di O .

Ad ogni $P \in r$ associamo un numero $x_P \in \mathbf{R}$, detto *ascissa del punto* P :

- se $P \in r_+$ il numero x_P è la lunghezza del segmento OP rispetto all'unità di misura data dal segmento OU ;
- se $P \in r_-$ il numero x_P è l'opposto della lunghezza del segmento OP rispetto all'unità di misura data dal segmento OU .

Osserviamo che ai punti di r_+ si associano numeri positivi, ai punti di r_- si associano numeri negativi. In particolare risulta che

$$\begin{aligned}x_O &= 0, \\x_U &= 1.\end{aligned}$$

Introdotta questa bigezione numeri reali e punti della retta r (denominata *retta reale*) si considerano perfettamente identificati.

1.4.1 Intervalli

Osserviamo che l'identificazione tra numeri e punti consente anche di interpretare graficamente la relazione d'ordine:

$$x \leq y$$

se e solo se y si trova a destra di x .

Ora assumono particolare importanza alcuni sottoinsiemi di \mathbf{R} , quelli che rappresentano segmenti e semirette.

- Intervalli limitati = segmenti

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{ \} \\[a, b) &= \{ \}\end{aligned}$$

- Intervalli illimitati = semirette

$$\begin{aligned}[a, +\infty) &= \{ \} \\(a, +\infty) &= \{ \}\end{aligned}$$

1.5 Piano cartesiano

Abbiamo introdotto la bigezione tra l'insieme \mathbf{R} e una retta.

Consideriamo ora il prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ossia l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Tale insieme può essere messo in bigezione con i punti del piano.

Sul piano si fissano due rette perpendicolari, dette *assi cartesiani*, ciascuna delle quali identificata con l'insieme \mathbf{R} .

Ad ogni coppia di numeri reali $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ si associa un punto del piano....

Viceversa ad ogni punto P del piano si associa una coppia di numeri reali (x_P, y_P) detti rispettivamente *ascissa ed ordinata del punto P* ; ascissa ed ordinata di P si dicono anche *coordinate del punto P* .

Per *piano cartesiano* si intende il piano munito di un sistema di assi cartesiani, in modo che a ciascun punto si associ la coppia delle coordinate.

1.5.1 Introduzione alla geometria analitica

...

1.6 Rappresentazione dei numeri

Anzitutto dobbiamo sottolineare la distinzione tra il numero come ente astratto e la sua rappresentazione concreta (indispensabile per le applicazioni e per i calcoli). Per entrare in argomento consideriamo inizialmente gli interi naturali. La tabella seguente chiarisce la distinzione tra numero e rappresentazione.

rappresentazione decimale	5	11
rappresentazione "primitiva"	IIIII	IIIIIIIIII
rappresentazione romana	V	XI
rappresentazione binaria	101	1011

Osservazione 1.24 *Per ciascun numero intero è sufficiente una stringa finita.*

La scelta del sistema di rappresentazione dipende da varie considerazioni:

- si vogliono evitare stringhe eccessivamente lunghe;
- il sistema deve consentire di svolgere facilmente calcoli elementari.

Il sistema decimale su cui ci soffermiamo, così come il sistema binario, è di tipo posizionale. Ad esempio scriviamo

$$1682$$

e intendiamo

$$1 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2$$

ossia

$$1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2$$

Osservazione 1.25 *Attualmente si usano solo sistemi posizionali (decimale, binario, esadecimale). Dalla scelta della base dipende la lunghezza della stringa necessaria per rappresentare un prefissato $n \in \mathbf{N}$.*

Passiamo ora ai numeri reali, rimanendo nel sistema decimale.

Come abbiamo cercato di far intuire nel paragrafo precedente, a ciascun $x \in \mathbf{R}$ si associa una successione di infinite cifre (*allineamento decimale*) e si scrive

$$x = \pm c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0, d_1 d_2 \dots$$

dove $c_i, d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. La precedente scrittura si intende

$$\begin{aligned} x &= \pm c_m \cdot 10^m + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0 \\ &\quad + d_1/10 + d_2/100 + \dots \end{aligned}$$

Precisiamo che i puntini di sospensione a destra sono essenziali, trattandosi di infinite cifre.

Si possono presentare tre situazioni:

- allineamento decimale finito

$$\begin{aligned} x_1 &= 135,000\dots \\ x_2 &= 27,4500\dots \end{aligned}$$

(da un certo punto in poi le cifre sono tutte uguali a 0, oppure a 9);

- allineamento decimale periodico

$$\begin{aligned} x_3 &= 12,51515151\dots \\ x_4 &= 2,1234234234\dots \end{aligned}$$

- allineamento decimale non periodico

$$\begin{aligned} x_5 &= 3,141692653589\dots \\ x_6 &= 2,718281845904\dots \end{aligned}$$

Le prime due situazioni corrispondono a numeri razionali (ricordiamo infatti che $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$); in particolare gli allineamenti decimali finiti corrispondono ai cosiddetti *numeri razionali decimali*. Precisamente

$$\begin{aligned} x_1 &= 135 \\ x_2 &= 549/20 \\ x_3 &= 413/33 \\ x_4 &= 2357/1110 \end{aligned}$$

La terza situazione corrisponde a *numeri irrazionali*, ossia numeri reali non razionali. Nell'esempio abbiamo riportato le prime cifre dell'allineamento decimale corrispondente a due costanti fondamentali

$$\begin{aligned} x_5 &= \pi \\ x_6 &= e \end{aligned}$$

1.6.1 Manipolazione di numeri

La rappresentazione con stringhe finite (possibile con interi e razionali) consente di utilizzare procedure di calcolo esatte (almeno per le cosiddette “quattro operazioni”).

Ora osserviamo che nella realtà materiale esistono solo stringhe finite, quindi se abbiamo $x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ (ossia x irrazionale, ad esempio $x = \sqrt{2}$) rappresentandolo con una stringa finita (ad esempio 1,4142) non scriviamo esattamente x ma una sua approssimazione $x' \in \mathbf{Q}$. Precisamente se tronciamo a k cifre dopo la virgola commettiamo un errore

$$\epsilon = |x - x'| < 1/10^k$$

Per svolgere tutti i calcoli (non letterali) ovviamente utilizziamo x' e di conseguenza il risultato sarà affetto da errore rispetto al risultato teorico.

Osservazione 1.26 *A livello teorico i problemi di approssimazione si presentano con i numeri irrazionali (rappresentabili solo con stringhe infinite). In realtà un intero con un milione (o un miliardo, o mille miliardi) di cifre, anche nella più semplice manipolazione algebrica, viene ad essere rappresentato e trattato come una stringa infinita, cioè viene approssimato.*

Lo studio della rappresentazione dei numeri, della loro approssimazione e della trasmissione dell'errore viene svolto ordinariamente in *Analisi numerica*.