

Dispensa n.1
Esercitazioni di
Analisi Mat. 1

(a cura di L. Pisani)
C.d.L. in Matematica
Università degli Studi di Bari

a.a. 2003/04

Indice

Notazioni	iii
1 Principi di sostituzione	1
1.1 Funzioni equivalenti in un punto	2
1.2 Parti principali	4
1.2.1 Equivalenze notevoli	5
1.3 Equivalenza nelle somme	6
1.4 Termini trascurabili	7
1.4.1 Notazione “ o piccolo” di Landau	9
1.5 Considerazioni conclusive	10
2 Limiti notevoli	11
2.1 Enunciati ed esempi	11
2.2 Risoluzione delle forme $+\infty - \infty$	16
3 Teoria degli ordini	18
3.1 Infiniti di ordine inferiore e limiti	18
3.2 Confronto tra infiniti e ordini	18
3.3 Valutazione numerica dell'ordine	20
3.3.1 Esempi notevoli	21
3.3.2 Struttura fine	22
3.3.3 Famiglie di infiniti classificate tramite un multiindice . . .	23
3.4 Confronto di infinitesimi, limiti e ordini	24
3.4.1 Valutazione numerica dell'ordine	25
3.5 Ordine e operazioni	25
3.5.1 Prodotti e rapporti	25
3.5.2 Funzione composta	26
3.5.3 Somme	27
3.5.4 Esempi	28

Notazioni

Ove non presenti altre precisazioni, supporremo fissati

- A sottoinsieme di \mathbf{R} ;
- $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A ;

inoltre

- con f, g, \dots denoteremo funzioni reali definite in A , non nulle in un intorno di x_0 ;
- tutti i limiti si intendono per $x \rightarrow x_0$;
- con ℓ si denoterà un generico elemento di $\overline{\mathbf{R}}$.

Capitolo 1

Principi di sostituzione

Consideriamo la funzione polinomiale

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n.$$

In altri termini esiste un'altra funzione

$$Q(x) = a_n x^n$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x).$$

Esistono due possibili modi, del tutto equivalenti, per generalizzare questa *sostituzione* dentro il limite. Osserviamo che

- risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} = 1;$$

questo conduce alla definizione di *funzioni equivalenti*;

- risulta

$$P(x) = Q(x) + R(x)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0;$$

questo conduce alla definizione di *termine trascurabile*.

In questo capitolo presenteremo queste due nozioni.

1.1 Funzioni equivalenti in un punto

Definizione 1.1 Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono (asintoticamente) equivalenti in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (1.1)$$

In questa situazione scriveremo

$$f(x) \cong g(x) \quad [\text{per } x \rightarrow x_0].$$

Sottolineiamo che l'equivalenza è una nozione di carattere locale, nel senso che due funzioni equivalenti in un punto non è detto che lo siano in altri punti.

L'utilità di questa definizione viene messa subito in luce dai seguenti risultati.

Proposizione 1.2 Se due funzioni sono equivalenti in x_0 , allora hanno in x_0 lo stesso comportamento, nel senso che o entrambe non sono regolari o i rispettivi limiti coincidono; in simboli

$$f(x) \cong g(x) \quad (\text{per } x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Proposizione 1.3 Si abbiano due coppie di funzioni equivalenti:

$$f_1(x) \cong g_1(x) \quad e \quad f_2(x) \cong g_2(x).$$

Allora risulta

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cong g_1(x) \cdot g_2(x).$$

In particolare le funzioni $f_1(x) \cdot f_2(x)$ e $g_1(x) \cdot g_2(x)$ hanno lo stesso comportamento, nel senso sopra precisato.

L'importanza di questo corollario è evidente: nelle forme indeterminate $0 \cdot (\pm\infty)$ potremo sostituire uno o entrambi i fattori con termini equivalenti.

Proposizione 1.4 Se la funzione $f(x)$ è equivalente a $g(x)$, allora anche $1/f(x)$ è equivalente a $1/g(x)$.

Se abbiamo due coppie di funzioni equivalenti

$$f_1(x) \cong g_1(x) \quad e \quad f_2(x) \cong g_2(x),$$

allora le funzioni $f_1(x)/f_2(x)$ e $g_1(x)/g_2(x)$ hanno lo stesso comportamento.

Questa proposizione ha un'importanza evidente, con riferimento alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Anche se l'equivalenza si applica principalmente a funzioni infinite o infinitesime, vogliamo segnalare che, se $f(x)$ converge ad numero $\ell \neq 0$, allora ovviamente $f(x) \cong \ell$ (intendendo la funzione di costante valore ℓ).

Risultano molto utili, infine, i seguenti risultati, concernenti il comportamento dell'equivalenza rispetto alla composizione.

Proposizione 1.5 Se

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0 \\ \varphi(t) \neq x_0 \end{cases} \quad \text{in un intorno di } t_0$$

e

$$f(x) \cong g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

allora risulta

$$f(\varphi(t)) \cong g(\varphi(t)) \quad \text{per } t \rightarrow t_0.$$

Nella proposizione precedente le due funzioni equivalenti comparivano all'esterno della composizione. Ora ci chiediamo in quali casi possiamo affermare che

$$f(x) \cong g(x) \implies \varphi(f(x)) \cong \varphi(g(x)).$$

Alcuni casi rilevanti in cui l'equivalenza si conserva sono illustrati di seguito.

Proposizione 1.6 *Se*

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ f(x) &\cong g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

allora, per ogni $p > 0$, risulta

$$(f(x))^p \cong (g(x))^p \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Proposizione 1.7 *Se*

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \ell \geq 0, \ell \neq 1, \\ f(x) &\cong g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

allora, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a(f(x)) \cong \log_a(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Esempio 1.8 *La condizione aggiuntiva $\ell \neq 1$ è necessaria. Le funzioni $1+x$ e $1+x^2$ sono equivalenti per $x \rightarrow 0$. Tuttavia vedremo che*

$$\log(1+x) \cong x \not\cong x^2 \cong \log(1+x^2).$$

Osservazione 1.9 *Se $f(x)$ è una funzione infinita, allora la condizione*

$$f(x) - g(x) \rightarrow \ell \in \mathbf{R} \tag{1.2}$$

è detta di equivalenza forte in quanto essa implica

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1,$$

senza che valga l'implicazione opposta. Ad esempio per $x \rightarrow +\infty$ le funzioni $\sqrt{x^2+x}$ e $\sqrt[3]{x^3+x^2}$ sono entrambe equivalenti ad x ; tuttavia solo la prima è equivalente in senso forte. Osserviamo che la condizione (1.2) è ovvia per funzioni convergenti ed equivalenti.

Nella terminologia della teoria degli ordini, potremmo affermare che se f e g sono infinite ed equivalenti in senso forte, allora per ogni $a > 0$, $a \neq 1$ le funzioni composte $\exp_a(f)$ ed $\exp_a(g)$ hanno lo stesso ordine. In particolare se

$$g(x) - f(x) \rightarrow 0, \tag{1.3}$$

allora

$$\exp_a(f(x)) \cong \exp_a(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

La condizione aggiuntiva (1.3) è necessaria. Infatti le funzioni x^2 e x^2+x sono equivalenti per $x \rightarrow +\infty$, ma non verificano (1.3). Risulta

$$e^{x^2} \not\cong e^{x^2+x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

1.2 Parti principali

In corrispondenza del punto x_0 vogliamo fissare un infinitesimo ed un infinito di riferimento.

Definizione 1.10 *Si definisce infinitesimo principale in x_0 la funzione*

$$\epsilon_{x_0}(x) = \begin{cases} x - x_0 & \text{se } x_0 \in \mathbf{R}, \\ 1/x & \text{se } x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

La funzione infinita

$$\omega_{x_0}(x) = \frac{1}{\epsilon_{x_0}(x)} = \begin{cases} 1/(x - x_0) & \text{se } x_0 \in \mathbf{R}, \\ x & \text{se } x_0 = \pm\infty, \end{cases}$$

prende il nome di infinito principale in x_0 .

Tra le funzioni infinitesime in x_0 , quelle più semplici sono della forma

$$c(\epsilon_{x_0}(x))^\alpha \tag{1.4}$$

essendo $c \in \mathbf{R}$ e $\alpha > 0$. Questo suggerisce la seguente definizione.

Definizione 1.11 *Sia $f(x)$ una funzione infinitesima. Si definisce parte principale di f in x_0 l'unico infinitesimo della forma (1.4) equivalente ad $f(x)$ in x_0 .*

La precedente definizione richiede alcune immediate precisazioni.

1. Nel caso di esponenti non interi si richiede implicitamente che si tratti di limiti unilaterali, in modo che la base in (1.4) sia positiva.
2. Come implicitamente affermato nella definizione, la parte principale è unica.
3. Non è affatto detto che ogni infinitesimo ammetta parte principale. Consideriamo, ad esempio $x \rightarrow 0$; le funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1 + \sin^2 \frac{1}{x}) \\ f(x) &= e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

non ammettono parte principale; abbastanza semplice la dimostrazione nel primo caso, più delicata nel secondo.

4. Se f è una funzione di classe C^∞ ed x_0 è un punto interno ad A , la parte principale di f in x_0 coincide con il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor.

Osservazione 1.12 *Sussiste ovviamente la definizione analoga di parte principale di un infinito.*

1.2.1 Equivalenze notevoli

Tutte le volte che si incontra un infinitesimo sarà opportuno cercare di passare alla rispettiva parte principale. Essa si determina a partire da equivalenze note, tramite le regole contenute nelle proposizioni del paragrafo precedente.

Riportiamo una tabella di parti principali di alcune funzioni infinitesime per $x \rightarrow 0$. Una traccia di dimostrazione la daremo nel Paragrafo 1.5.

funzione	parte princ.	ordine
$\sin x$	x	1
$\tan x$	x	1
$\arcsin x$	x	1
$\arctan x$	x	1
$1 - \cos x$	$x^2/2$	2
$\log_a(1+x)$	$x/\log a$	1
$a^x - 1$	$(\log a) x$	1
$(1+x)^\alpha - 1$	αx	1

Come casi particolari abbiamo

funzione	parte princ.	ordine
$\log(1+x)$	x	1
$e^x - 1$	x	1
$\sqrt[n]{1+x} - 1$	x/n	1

Abbiamo anche equivalenze notevoli per $x \rightarrow 1$.

funzione	parte princ.	ordine
$\log x$	$x - 1$	1
$\arccos x$	$\sqrt{2}\sqrt{1-x}$	1/2

Vediamo come si applicano queste equivalenze

Esempio 1.13 *Determiniamo la parte principale di*

$$f(x) = 4\sqrt{\log\left(1 + 3\arcsin^3\frac{x^2}{2}\right)}$$

per $x \rightarrow 0$. Sappiamo che

$$\log(1+x) \cong x \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Applicando la Proposizione 1.5 con $\varphi(x) = 3\arcsin^3\frac{x^2}{2}$ (in quanto $\varphi(x) \rightarrow 0$), otteniamo

$$\log\left(1 + 3\arcsin^3\frac{x^2}{2}\right) \cong 3\arcsin^3\frac{x^2}{2}. \quad (1.5)$$

Sappiamo anche che

$$\arcsin x \cong x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e quindi, poiché elevando a potenza si conserva l'equivalenza,

$$\arcsin^3 x \cong x^3.$$

Applicando ancora la Proposizione 1.5, con $\varphi(x) = x^2/2 \rightarrow 0$, otteniamo

$$\arcsin^3 \frac{x^2}{2} \cong \frac{x^6}{8}. \quad (1.6)$$

Da (1.5) e (1.6) consegue

$$\log \left(1 + 3 \arcsin^3 \frac{x^2}{2} \right) \cong \frac{3}{8} x^6.$$

Elevando alla potenza $1/2$ si conserva l'equivalenza e pertanto

$$\sqrt{\log \left(1 + 3 \arcsin^3 \frac{x^2}{2} \right)} \cong \sqrt{\frac{3}{8}} x^3.$$

In definitiva possiamo concludere che la parte principale di $f(x)$, per $x \rightarrow 0$, è $\sqrt{6}x^3$.

A parte i casi segnalati nelle Proposizioni 1.6 e 1.7, osserviamo che si procede dalla funzione più “esterna” a quella più “interna”.

1.3 Equivalenza nelle somme

Sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 1.14 *Si abbiano due coppie di funzioni equivalenti*

$$f_1(x) \cong g_1(x) \quad e \quad f_2(x) \cong g_2(x).$$

Supponiamo, in un intorno di x_0 ,

$$\left| \frac{g_1(x) + g_2(x)}{g_1(x)} \right| \geq \delta > 0. \quad (1.7)$$

Risulta allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = 1$$

Osserviamo quanto segue.

- La condizione (1.7) è immediatamente verificata qualora gli addendi siano concordi in un intorno di x_0 .
- La condizione (1.7) è immediatamente verificata qualora risulti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \ell \neq -1.$$

Osservazione 1.15 *In realtà, se $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono parti principali, la condizione*

$$g_1(x) + g_2(x) \not\equiv 0 \quad (1.8)$$

implica la condizione (1.7); quindi nella maggior parte degli esercizi è sufficiente verificare la (1.8).

Se g_1 e g_2 non sono parti principali, la condizione (1.8) non implica la (1.7) quindi bisogna prestare particolare attenzione. Ad esempio consideriamo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x = g_1(x) \\ f_2(x) &= 1 - \sqrt{1 + 2x + 4x^2} \cong -x - 2x^2 = g_2(x) \end{aligned}$$

L'equivalenza è corretta ma, a norma di definizione, $g_2(x)$ non è la parte principale di $f_2(x)$. In questo caso abbiamo $g_1(x) + g_2(x) = -2x^2 \neq 0$, tuttavia non è affatto vero che

$$f_1(x) + f_2(x) \cong -2x^2.$$

Infatti lasciamo come semplice esercizio lo studio del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{x^2} = -3/2$$

che ci permette di affermare correttamente

$$f_1(x) + f_2(x) \cong -\frac{3}{2}x^2.$$

Osservazione 1.16 Se alla funzione $f_1 + f_2$ non si possono applicare le equivalenze, non è affatto escluso che un limite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_3(x)}$$

possa essere risolto scrivendolo nella forma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_3(x)} + \frac{f_2(x)}{f_3(x)} \right).$$

Ad esempio possiamo considerare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{e^x - 1}.$$

Osservazione 1.17 Nel caso di più di due addendi si richiede particolare attenzione. Per la risoluzione degli esercizi possiamo suggerire una regola pratica: se tutti gli addendi ammettono parte principale, affinché si conservi l'equivalenza nella somma è sufficiente che i termini con esponente più basso abbiano somma diversa da 0.

1.4 Termini trascurabili

Ora passiamo ad esporre una nozione che si integra con quella di funzione equivalente.

Definizione 1.18 Assegnate due funzioni $f(x)$ e $h(x)$, il termine $h(x)$ si dice trascurabile rispetto ad f in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0.$$

La denominazione *trascurabile* viene motivata dalla seguente proposizione, di dimostrazione immediata.

Proposizione 1.19 *Se $h(x)$ è trascurabile rispetto ad $f(x)$ in x_0 , allora*

$$f(x) + h(x) \cong f(x).$$

Una conseguenza immediata di questa proposizione è che, in tutte le somme, i termini trascurabili possono essere cancellati, ottenendo una funzione equivalente. Vogliamo osservare che la Proposizione 1.19 ammette il viceversa.

Proposizione 1.20 *Se due funzioni sono equivalenti in x_0 , allora differiscono per un termine trascurabile rispetto a ciascuna di esse.*

Proposizione 1.21 *Supponiamo $f(x)$ equivalente a $g(x)$ in x_0 ed $h(x)$ equivalente ad $l(x)$ in x_0 . Se $h(x)$ è trascurabile rispetto ad $f(x)$, allora $l(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$.*

Diamo ora un esempio base.

Esempio 1.22 *Se $f(x)$ è una funzione infinita ed $h(x)$ è una funzione limitata, allora $h(x)$ è trascurabile rispetto ad $f(x)$.*

Esempio 1.23 *Si voglia studiare, per $x \rightarrow +\infty$, la funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sin^2 x} + \arctan x.$$

Il termine $\arctan x$, essendo limitato, è trascurabile rispetto a $\sqrt[3]{x^2 + \sin^2 x}$, che è divergente; pertanto

$$f(x) \cong \sqrt[3]{x^2 + \sin^2 x} \quad (1.9)$$

A sua volta $\sin^2 x$, essendo limitato, è trascurabile rispetto al termine divergente x^2 ; pertanto

$$x^2 + \sin^2 x \cong x^2. \quad (1.10)$$

Dalla (1.10), applicando la Proposizione 1.6, consegue

$$\sqrt[3]{x^2 + \sin^2 x} \cong x^{2/3}. \quad (1.11)$$

Dalla (1.9) e dalla (1.11) otteniamo $f(x) \cong x^{2/3}$.

Esempio 1.24 *Siano $0 < p < q$. Consideriamo le funzioni x^p e x^q .*

Se $x \rightarrow 0^+$, allora x^q è trascurabile rispetto a x^p .

Se $x \rightarrow +\infty$, allora x^p è trascurabile rispetto a x^q .

Dobbiamo precisare che in presenza di più di due addendi, la cancellazione di un addendo non è operazione da farsi con leggerezza.

Esempio 1.25 *Consideriamo*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \pi x} - x + \arctan(-x) \right).$$

I primi due addendi sono infiniti mentre il terzo non lo è. Erroneamente potremmo ritenere $\arctan(-x)$ trascurabile rispetto a $(\sqrt{x^2 + \pi x} - x)$ e cancellarlo, così facendo otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \pi x} - x + \arctan(-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \pi x} - x).$$

Per risolvere questo limite osserviamo che

$$\sqrt{x^2 + \pi x} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{\pi}{x}} - 1 \right) \cong x \frac{1}{2} \frac{\pi}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (1.12)$$

In realtà, come appena visto, $(\sqrt{x^2 + \pi x} - x)$ non è infinito, quindi $\arctan(-x)$ non è affatto trascurabile e, alla luce di (1.12) abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \pi x} - x + \arctan(-x)) = 0.$$

Esempio 1.26 Consideriamo $x \rightarrow 0$. La funzione $\log(1 + x^2)$ è trascurabile rispetto ad x e rispetto a $\sin x$. Tuttavia, come vedremo in seguito, essa non è trascurabile rispetto a $x - \sin x$.

1.4.1 Notazione “o piccolo” di Landau

Definizione 1.27 Assegnata una funzione f , il simbolo $o(f; x_0)$ (si legge “o piccolo” di f in x_0) denota una generica funzione g trascurabile rispetto ad f in x_0 . Se non sorgono equivoci, si scrive semplicemente $o(f)$.

Questa nuova notazione richiede alcune precisazioni.

Quando diciamo funzione generica intendiamo *non meglio precisata*, in quanto di essa ci interessa solo la trascurabilità rispetto ad f .

Esempio 1.28 Se consideriamo $x \rightarrow +\infty$, con il simbolo $o(x^2)$ si può denotare tanto x quanto $\sin x$.

In maniera del tutto coerente con la definizione che abbiamo dato, alcuni autori usano il simbolo

$$o(1)$$

per denotare una generica funzione infinitesima.

La genericità può dare luogo a scritture e regole apparentemente paradossali.

Proposizione 1.29 Quale che sia f , si ha che

$$\begin{aligned} o(f) + o(f) &= o(f), \\ o(f) \cdot o(f) &= o(f^2). \end{aligned}$$

Infatti la somma di funzioni trascurabili rispetto ad f è anch'essa trascurabile rispetto ad f . La dimostrazione è analoga riguardo al prodotto.

Utilizzando la notazione “o piccolo”, la Proposizione 1.19 si enuncia sinteticamente come segue:

$$f(x) + o(f) \cong f(x). \quad (1.13)$$

Tenuto conto della (1.13), i risultati 1.2, 1.3, 1.4 possono essere rinunciati al modo seguente.

Proposizione 1.30 *La funzione $f(x) + o(f)$ ha lo stesso comportamento, per $x \rightarrow x_0$, della funzione $f(x)$, nel senso che o entrambe non sono regolari o i rispettivi limiti coincidono.*

Il prodotto $(f(x) + o(f)) \cdot (g(x) + o(g))$ ha lo stesso comportamento del prodotto $f(x)g(x)$.

Il rapporto $(f(x) + o(f)) / (g(x) + o(g))$ ha lo stesso comportamento del rapporto $f(x)/g(x)$.

Talvolta si incontra la scrittura

$$f(x) = g(x) + o(h).$$

Evidentemente essa vuol dire che (per $x \rightarrow x_0$) la differenza $f(x) - g(x)$ è trascurabile rispetto alla funzione h . Ovviamente tale scrittura è significativa se a sua volta $h = o(g)$.

Esempio 1.31 (differenziale) *Se f è derivabile in x_0 si può scrivere*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

La notazione o verrà usata anche nella formula di Taylor.

Esempio 1.32 *Sia f una funzione sufficientemente regolare. Possiamo scrivere*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

1.5 Considerazioni conclusive

Siamo partiti da una situazione nota, i limiti all'infinito delle funzioni polinomiali. Generalizzando quella situazione abbiamo visto che in un limite possiamo

- sostituire la funzione con una ad essa equivalente;
- cancellare nella funzione eventuali termini trascurabili.

Le due operazioni sono collegate tra loro: infatti (Proposizioni 1.19-1.20) due funzioni sono equivalenti se e solo se differiscono per un termine trascurabile.

Abbiamo impostato la nostra esposizione sulla nozione di funzioni equivalenti; l'esperienza didattica convalida questa scelta.

In realtà l'efficacia di questa tecnica negli esercizi dipende per intero, oltre che delle regole di equivalenza, della *tabella di equivalenze notevoli* (vedi Sottoparagrafo 1.2.1). Tutte quelle equivalenze vengono ottenute rigorosamente tramite il calcolo differenziale (vedi Esempio 1.31). Ad esempio, si dimostrerà che, per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

Per la Proposizione 1.19 abbiamo

$$x + o(x) \cong x$$

e quindi, per transitività,

$$\sin x \cong x$$

La nozione di termine trascurabile ritorna in alcuni limiti notevoli che presentiamo nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Limiti notevoli

Sotto il nome tradizionale di limiti notevoli passano alcune forme indeterminate.

2.1 Enunciati ed esempi

Proposizione 2.1 *Per ogni $a > 1$ e per ogni $p > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

In base a questo limite si suol dire che, per $x \rightarrow +\infty$, le potenze sono trascurabili rispetto agli esponenziali.

Esempio 2.2 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan 3^{-x}}{1 - \cos \frac{2}{x}}$$

Esempio 2.3 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x/2} \left(\sin \frac{1}{x} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Nella parentesi possiamo passare alle parti principali. Quindi possiamo osservare che

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x} \cong -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

oppure direttamente

$$\frac{1}{x} = o\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

D'altra parte

$$e^{x/2} = (\sqrt{e})^x$$

Esempio 2.4 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 + \sin x}}{x^3 + 6x}$$

Osserviamo che

$$x^6 + 6x \cong x^3.$$

Abbiamo anche

$$x^2 + \sin x \cong x^2,$$

tuttavia non possiamo affermare che

$$e^{x^2 + \sin x} \cong e^{x^2}.$$

In questo caso particolare possiamo osservare che

$$e^{x^2 + \sin x} = e^{x^2} e^{\sin x}$$

Pertanto il limite si trasforma in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3} e^{\sin x}.$$

Abbiamo

$$e^{\sin x} \geq e^{-1} > 0.$$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{3/2}} = +\infty$$

Pertanto si conclude

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 + \sin x}}{x^3 + 6x} = +\infty.$$

Esempio 2.5 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{\sqrt[3]{x+1}}}{\sqrt{x^4 \arctan x + 1}}.$$

Osserviamo che

$$\sqrt{x^4 \arctan x + 1} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^2$$

quindi il limite si riduce a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{\sqrt[3]{x+1}}}{x^2}.$$

Poniamo

$$t = \sqrt[3]{x+1},$$

da cui

$$x = t^3 - 1$$

e quindi il limite diventa

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4^t}{(t^3 - 1)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4^t}{t^6} = +\infty.$$

Esempio 2.6 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5.$$

Si tratta di una forma $(+\infty) \cdot 0$. Anzitutto cerchiamo di semplificare il limite: per $x \rightarrow 0^+$

$$\tan x^5 \cong x^5$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5.$$

Ora, in questo caso abbastanza semplice, possiamo cambiare variabile: $t = 1/\sqrt{x} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{10}} = +\infty.$$

E' opportuno segnalare un ovvio corollario sulle funzioni composte.

Corollario 2.7 Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$. Per ogni $a > 1$ e per ogni $p > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\varphi(x))^p}{a^{\varphi(x)}} = 0$$

Esempio 2.8 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} \tan x^5.$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\sin x + x}} = +\infty$$

E' ancora una forma $(+\infty) \cdot 0$. Come nell'esempio precedente abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} \tan x^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} x^5.$$

Tuttavia in questo caso non sembra immediato il cambio di variabile, pertanto applichiamo il corollario

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}} x^5 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^p} \left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p x^5 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^p} \frac{x^5}{(x + \sin x)^{p/2}} \end{aligned}$$

Il primo fattore è infinito (per ogni $p > 0$), per $p = 10$ il secondo fattore tende ad $1/2^5$ e quindi, complessivamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{(1/\sqrt{\sin x + x})^{10}} \frac{x^5}{(x + \sin x)^5} = +\infty$$

Proposizione 2.9 Per ogni $p > 0$ e per ogni $a > 0$, $a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$$

In base a questo limite si suol dire che, per $x \rightarrow +\infty$, i logaritmi sono infiniti trascurabili rispetto alle potenze.

Esempio 2.10 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \log x}{2x + x^2}.$$

Esempio 2.11 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x + 4}{x^4 + 3x^2 - 5} \right)^{\left(\frac{x^3 - 3}{x^5 + x} \right)}$$

Esempio 2.12 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x + e^{1/x}}$$

Evidentemente

$$x^6 \log x + e^{1/x} \cong x^6 \log x,$$

inoltre

$$x + \sin x \cong x$$

quindi

$$(x + \sin x)^2 \cong x^2$$

tuttavia non possiamo affermare che

$$e^{(x+\sin x)^2} \cong e^{x^2}.$$

Dunque il limite si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x}$$

Considerato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)^2 = +\infty$, per ogni $p > 0$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{(x + \sin x)^{2p}} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x} &= \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{(x + \sin x)^{2p}} \frac{(x + \sin x)^{2p}}{x^6 \log x} \cong \\ &\cong \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{(x + \sin x)^{2p}} \frac{x^{2p}}{x^6 \log x} = \\ &= \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{(x + \sin x)^{2p}} \frac{x^{2p-6}}{\log x}. \end{aligned}$$

Per $2p - 6 > 0$ entrambi i fattori divergono.

Esempio 2.13 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\log x} \right)^{1/x}$$

Corollario 2.14 Per ogni $p > 0$, per ogni $a > 1$ e per ogni $q > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^q x}{x^p} = 0$$

Corollario 2.15 Per ogni $p > 0$, per ogni $a \in (0, 1)$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^n x}{x^p} = 0$$

Esempio 2.16 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x \log^4 x + x^2}{\sqrt{x^3 - 3x} + x \log(x^2 + 1)}$$

Anche in questo caso abbiamo limiti analoghi per le funzioni composte, ne riportiamo solo uno.

Corollario 2.17 Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$. Per ogni $p > 0$ e per ogni $a > 0$, $a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a \varphi(x)}{(\varphi(x))^p} = 0$$

Proposizione 2.18 Per ogni $p > 0$ e per ogni $a > 0$, $a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a x = 0.$$

Corollario 2.19 Per ogni $p > 0$, per ogni $a > 1$ e per ogni $q > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a^q x = 0.$$

Corollario 2.20 Per ogni $p > 0$, per ogni $a \in (0, 1)$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a^n x = 0.$$

Esempio 2.21 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x + x^3} \log^2 \sin x.$$

Anzitutto osserviamo che, per $x \rightarrow 0^+$, abbiamo

$$x + x^3 \cong x$$

e quindi

$$\sqrt{x + x^3} \cong \sqrt{x}$$

Inoltre sappiamo che

$$\sin x \cong x \rightarrow 0,$$

da ciò consegue (Proposizione 1.7)

$$\log \sin x \cong \log x,$$

e quindi

$$\log^2 \sin x \cong \log^2 x.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x + x^3} \log^2 \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log^2 x = 0.$$

Proposizione 2.22 Per ogni $a > 1$ e per ogni $p > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^p = 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x x^n = 0$$

Corollario 2.23 Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = -\infty$. Per ogni $a > 1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{\varphi(x)} (\varphi(x))^n = 0$$

Esempio 2.24 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{(x-2)/(x-1)^2}}{\sin(\pi x) \log^2 x}$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$$

Dunque si tratta di una forma $0/0$. Anzitutto cambiamo variabile

$$t = x - 1 \rightarrow 0$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^{(t-1)/t^2}}{\sin(\pi(t+1)) \log^2(t+1)}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sin(\pi t + \pi) &= -\sin(\pi t) \cong -\pi t \\ \log^2(1+t) &\cong t^2 \end{aligned}$$

e pertanto il limite si riduce a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^{(t-1)/t^2}}{-\pi t^3} = -\frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \left[2^{(t-1)/t^2} \left(\frac{t-1}{t^2} \right)^n \right] \left[\left(\frac{t^2}{t-1} \right)^n \frac{1}{t^3} \right].$$

In base al corollario il primo fattore è infinitesimo per ogni $n \in \mathbf{N}$, il secondo fattore è infinitesimo per $n \geq 2$. Pertanto il limite è uguale a 0.

Torneremo su alcuni di questi esempi quando avremo introdotto la teoria degli ordini.

2.2 Risoluzione delle forme $+\infty - \infty$

Ricordiamo che le forme indeterminate sono quattro

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Quella che sembra sfuggire alle procedure viste fino ad ora è la prima.

Si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

e si voglia studiare la forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = +\infty - \infty$$

Si suggerisce di effettuare la trasformazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right). \quad (2.1)$$

Ci siamo ricondotti a studiare la forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Supponiamo di aver risolto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

- Se $\ell \neq 1$, la forma a secondo membro di (2.1) è determinata e il risultato è infinito (con il segno appropriato).
- Se $\ell = 1$ (infiniti equivalenti), la forma a secondo membro di (2.1) è indeterminata $+\infty \cdot 0$; in questo caso si suggerisce di studiare tramite equivalenze la natura del termine infinitesimo

$$1 - \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Esempio 2.25 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + \log_2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2^x}{3^x - 2^x}$$

Capitolo 3

Teoria degli ordini

3.1 Infiniti di ordine inferiore e limiti

Introduciamo la seguente definizione.

Definizione 3.1 *Se f e g sono infinite in x_0 , diremo che g è un infinito di ordine inferiore a f se risulta*

$$g = o(f)$$

ossia se g è trascurabile rispetto ad f , ossia, in base alla definizione, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

In questo caso, equivalentemente, si dirà che f è un infinito di ordine superiore a g .

In base alla definizione che abbiamo appena dato, la Proposizione 1.30 si rienuncia, grosso modo, come segue.

Teorema 3.2 (eliminazione degli infiniti di ordine inferiore) *In un limite ove compaiano sommati più infiniti, si possono cancellare quelli di ordine inferiore.*

Questo teorema risolve formalmente quasi tutte le forme $+\infty - \infty$ e semplifica di molto le forme $0(\pm\infty)$ e $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. In pratica, così come enunciato, non è di grande utilità, in quanto confrontare tra loro tutti gli addendi infiniti che compaiono in una somma equivale a risolvere il limite.

La teoria che stiamo per svolgere ci risparmia di studiare volta per volta i rapporti tra i diversi addendi.

3.2 Confronto tra infiniti e ordini

La relazione tra funzioni infinite definita sopra è sicuramente transitiva e lascia pensare ad una sorta di stretto ordinamento tra funzioni infinite.

Tuttavia non si deve pensare che prese due qualsiasi funzioni f e g debba verificarsi che una delle due è di ordine superiore all'altra.

Precisamente può verificarsi quanto segue:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| = 0$ e in questo caso, come si è detto, f è un infinito di ordine superiore a g ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| = +\infty$ e in questo caso, simmetrico del precedente, g è un infinito di ordine superiore a f .
- caso intermedio: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| = \ell \in (0, +\infty)$;
- non esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right|$.

Diamo dunque una definizione.

Definizione 3.3 *I due infiniti f e g hanno lo stesso ordine se*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| = \ell \in (0, +\infty).$$

Se non esiste il limite del rapporto, diremo sinteticamente che si tratta di “*infiniti non confrontabili*”. Diamo di seguito due esempi.

Esempio 3.4 *Per $x \rightarrow +\infty$, possiamo considerare le funzioni*

$$\begin{aligned} f(x) &= x(2 + \sin x), \\ g(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Per queste due funzioni non esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{x(2 + \sin x)}{2x} \right|$$

e risulta

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \sin x)}{2x} = 1/2 \quad e \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \sin x)}{2x} = 3/2.$$

Esempio 3.5 *Possiamo considerare, sempre per $x \rightarrow +\infty$, le funzioni*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ g(x) &= x + x^3 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Per queste funzioni non esiste il limite del rapporto; il minimo limite del rapporto è 0, il massimo limite $+\infty$.

Osservazione 3.6 *Dobbiamo segnalare che, in alternativa alla 3.3, esiste un'altra ragionevole definizione di “infiniti dello stesso ordine”.*

Secondo alcuni autori, i due infiniti f e g hanno lo stesso ordine se

$$0 < \liminf_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| \quad e \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(f)}{f(x)} \right| < +\infty.$$

Se adottiamo questa seconda definizione, due funzioni non confrontabili in base alla Definizione 3.3 potrebbero risultare dello stesso ordine; è quello che si osserva nel primo esempio. Tuttavia il secondo esempio mostra che, anche se adottassimo la seconda definizione (meno restrittiva della 3.3), continueremmo ad avere infiniti non confrontabili.

Osservazione 3.7 *E' immediato osservare che se due infiniti sono equivalenti nel senso della Definizione 1.1, essi hanno ovviamente lo stesso ordine; non è vero il viceversa.*

Fino ad ora si è parlato di ordine di infiniti come conseguenza di un confronto. Ora vogliamo dare una definizione rigorosa.

Teorema 3.8 *La proprietà di avere lo stesso ordine definisce una relazione di equivalenza tra funzioni infinite.*

Definizione 3.9 *Si definisce ordine la classe di equivalenza tra infiniti*

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0}(f) = \{g \text{ infinita in } x_0 \mid f \text{ e } g \text{ hanno lo stesso ordine}\}$$

Ovviamente, ove non sorgano ambiguità, si può omettere la precisazione $x \rightarrow x_0$.

Data questa definizione, sull'insieme degli ordini (insieme quoziente) si può anche introdurre una relazione d'ordine (non totale).

Definizione 3.10 *Poniamo*

$$\text{ord}(g) \preccurlyeq \text{ord}(f)$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \ell \in [0, +\infty),$$

ossia l'ordine di g è inferiore all'ordine di f nel senso della Definizione 3.1 oppure se f e g hanno lo stesso ordine nel senso della Definizione 3.3.

Precisiamo che la definizione della relazione \preccurlyeq è ben posta in quanto il confronto tra infiniti è compatibile con la relazione di equivalenza.

3.3 Valutazione numerica dell'ordine

Precisato che, a rigore, l'ordine è una classe di equivalenza, è molto comodo per gli esercizi avere una valutazione numerica dell'ordine, nel senso che andiamo a precisare.

Fissato un infinito campione, un sottoinsieme proprio dell'insieme degli ordini è bigettivo all'intervallo $(0, +\infty)$. Su questo insieme di ordini la relazione \preccurlyeq coincide con la relazione d'ordine su \mathbf{R} . Quanto agli altri ordini, quelli non rappresentati da un numero reale, anche confronti parziali possono essere di una certa utilità.

In corrispondenza del punto x_0 , si considera l'infinito campione $\omega_{x_0}(x)$ (coincidente con l'infinito principale fissato a suo tempo) e si assume la seguente definizione.

Definizione 3.11 *Una funzione f è infinita di ordine reale $\alpha \in (0, +\infty)$ in x_0 se*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{(\omega_{x_0}(x))^\alpha} \right| = \ell \in (0, +\infty). \quad (3.1)$$

In altre parole, dire che l'ordine di f è α vuol dire che f è dello stesso ordine del campione elevato ad α . In questo caso, con abuso di notazione rispetto alla Definizione 3.9, scriveremo per semplicità

$$\text{ord}(f) = \alpha.$$

Analogamente si daranno le definizioni di infinito di ordine maggiore o minore di α (secondo che il limite in (3.1) sia rispettivamente $+\infty$ o 0). Coerentemente scriveremo

$$\text{ord}(f) > \alpha \quad \text{e} \quad \text{ord}(f) < \alpha.$$

3.3.1 Esempi notevoli

Per presentare alcune situazioni particolari, soffermeremo la nostra attenzione sulle funzioni infinite per $x \rightarrow +\infty$, per le quali abbiamo fissato l'infinito campione $\omega_{+\infty}(x) = x$.

- Per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$ risulta

$$\begin{aligned} \text{ord}(\log x) &< \alpha \\ \text{ord}(e^x) &> \alpha \end{aligned}$$

- Fissato $p > 0$, la funzione

$$x^p \log x$$

ha ordine strettamente maggiore di p e strettamente minore di q , per ogni $q > p$.

Se i primi due esempi potevano farci pensare è sufficiente aggiungere all'intervallo di ordini $(0, +\infty)$ un *ordine comunque piccolo* ed un *ordine comunque grande*, il terzo esempio mostra che le cose sono molto più complicate. Non esiste, infatti, alcun numero che realizza le disuguaglianze riferite all'ordine di $x^p \log x$.

Gli esempi visti sopra non sono ancora i peggiori, infatti le funzioni in questione erano confrontabili con tutte le potenze dell'infinito campione. Non è detto che questo accada sempre.

- Fissato $p > 0$, la funzione

$$x^p(1 + \sin^2 x)$$

ha ordine strettamente maggiore di q , per tutti i $q < p$; d'altra parte l'ordine è minore di q per tutti i $q > p$, tuttavia la funzione non è confrontabile con x^p .

- Fissati $p > 0$ e $q \geq 0$, la funzione

$$x^p(1 + x^q \sin^2 x)$$

ha ordine maggiore di α per ogni $\alpha < p$; d'altra parte l'ordine è minore di α , per ogni $\alpha > p + q$, tuttavia questa funzione non è confrontabile con alcuna funzione potenza con esponente $\alpha \in [p, p + q]$.

- Fissato $p > 0$, la funzione

$$\log x(1 + x^p \sin^2 x)$$

ha ordine strettamente minore di q , per ogni $q > p$, tuttavia non è confrontabile con alcuna funzione potenza con esponente $\alpha \leq p$.

- Fissato $p > 0$, la funzione

$$x^p(1 + e^x \sin^2 x)$$

ha ordine maggiore di q , per ogni $q < p$, tuttavia non è confrontabile con alcuna funzione potenza con esponente $\alpha \geq p$.

A conclusione possiamo osservare esistono funzioni i cui ordini verificano le stesse stime parziali e che non sono confrontabili.

- Le funzioni

$$x^p(1 + x^q \sin^2 x)$$

$$x^p(1 + x^q \cos^2 x)$$

non sono confrontabili.

3.3.2 Struttura fine

Ora vogliamo approfondire alcune questioni riguardanti la struttura dell'insieme degli ordini. Per semplicità continueremo ad occuparci di funzioni divergenti per $x \rightarrow +\infty$.

La prima questione è la seguente: *scegliendo un infinito campione più piccolo, si può avere una classificazione più precisa degli ordini?* La risposta è *NO*.

Consideriamo, ad esempio, $\tilde{\omega}_{+\infty}(x) = \log x$. Risulta quanto segue:

- la funzione $\log(\log x)$ ha ordine comunque piccolo rispetto a $\tilde{\omega}_{+\infty}(x)$, infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x)}{\log^\alpha x} \stackrel{t=\log x}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = 0.$$

Quindi si è riprodotta la situazione di un ordine non associabile ad alcun numero reale. Ma c'è di peggio.

- Per ogni $p > 0$ la funzione x^p ha ordine comunque grande rispetto a $\tilde{\omega}_{+\infty}(x)$.

Questa mancanza di discriminazione tra funzioni diverse di uso comune non rende molto utile questa scelta dell'infinito campione, mentre è molto comodo avere l'ordine coincidente con l'esponente.

Possiamo ora vedere la cosa da un altro punto di vista.

In una tabella indichiamo l'ordine delle funzioni misurate rispetto ai due diversi campioni

	rispetto a x	rispetto a $\log x$
e^x	comunque grande	comunque grande
x^p	p	comunque grande
$\log^p x$	comunque piccolo	p
$\log(\log x)$	comunque piccolo	comunque piccolo

Passare dal campione x al campione $\log x$ è come mettere una *lente di ingrandimento*:

- si apprezzano le differenze tra oggetti che apparivano comunque piccoli (funzioni $\log^p x$ e $\log(\log x)$);
- l'immagine di oggetti più grandi appare sfuocata, nel senso che le funzioni x^p e e^x appaiono indistintamente comunque grandi.

Analogamente, se volessimo discriminare tra oggetti comunque grandi (funzioni e^{ax} e e^{e^x}), dovremmo cambiare campione (utilizzare un *telescopio*), ma non avremmo *a fuoco* gli oggetti piccoli.

La proprietà di rivelare, ad ogni cambio di scala, nuovi particolari in una struttura autosimile è tipica degli *oggetti frattali*.

Possiamo anche mettere questa proprietà sotto forma di teorema.

Teorema 3.12 *Per ogni φ funzione infinita in x_0 esiste ψ funzione infinita tale che, per ogni $\alpha > 0$*

$$\text{ord}(\psi^\alpha) \prec \text{ord}(\varphi) \quad (3.2)$$

Tenuto conto del fatto che, se $\text{ord}(\psi) \in \mathbf{R}$, allora

$$\text{ord}(\psi^\alpha) = \alpha \text{ord}(\psi),$$

la (3.2) rivela che siamo in una situazione *non archimedeo*.

Una proprietà analoga vale per funzioni che abbiano ordine non infinitamente piccolo ma limitato.

Teorema 3.13 *Per ogni coppia di funzioni φ_0 e φ infinite in x_0 , con*

$$\text{ord}(\varphi_0) \prec \text{ord}(\varphi)$$

esiste ψ funzione infinita tale che, per ogni $\alpha > 0$

$$\text{ord}(\psi^\alpha / \varphi_0) \prec \text{ord}(\varphi / \varphi_0)$$

3.3.3 Famiglie di infiniti classificate tramite un multiindice

Esclusa la possibilità di classificare tramite un solo indice reale gli infiniti ed i rispettivi ordini, possiamo considerare alcune famiglie di infiniti classificate tramite un multiindice.

Soffermandoci ancora sul caso $x \rightarrow +\infty$, consideriamo la seguente famiglia di funzioni

$$\{\exp(\alpha x) x^\beta \log^\gamma x\} \quad (3.3)$$

con il multiindice $(\alpha, \beta, \gamma) \in ([0, +\infty])^3$, con $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Tale famiglia, come la famiglia $\{x^\alpha\}$ delle potenze, ha la caratteristica di avere le funzioni a due a due confrontabili: si ha che

$$\text{ord}(\exp(\alpha_1 x) x^{\beta_1} \log^{\gamma_1} x) \prec \text{ord}(\exp(\alpha_2 x) x^{\beta_2} \log^{\gamma_2} x)$$

se e solo se

$$\begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 \\ \text{oppure} \\ \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 < \beta_2 \\ \text{oppure} \\ \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 \text{ e } \gamma_1 < \gamma_2 \end{cases}$$

Questo particolare ordinamento sui multiindici prende il nome di *ordinamento lessicografico* (ed è quello tipico degli elenchi alfabetici: si osserva la prima lettera; a parità di prima lettera, conta la seconda e così via...).

Ovviamente la famiglia (3.3) non esaurisce tutti gli infiniti e tutte le sue possibili analoghe estensioni del tipo

$$\left\{ \exp(\alpha \exp x) \cdot \exp \beta x \cdot x^\gamma \cdot \log^\delta x \cdot \log^\epsilon (\log x) \right\}$$

continueranno a rivelarsi insufficienti.

Famiglie con una analoga classificazione a multiindici le troviamo anche nel sottoinsieme delle funzioni infinite con ordine maggiore di p e minore di $p + \epsilon$

$$\begin{aligned} & \{x^p \log^\alpha x\} \\ & \left\{ x^p \log^\alpha x \log^\beta (\log x) \right\} \\ & \dots \end{aligned}$$

3.4 Confronto di infinitesimi, limiti e ordini

Definizione 3.14 Se f e g sono infinitesime in x_0 , diremo che g è un infinitesimo di ordine superiore a f se risulta

$$g = o(f)$$

ossia se g è trascurabile rispetto ad f , ossia, in base alla definizione, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

In questo caso, equivalentemente, si dirà che f è un infinitesimo di ordine inferiore a g .

In base alla definizione che abbiamo appena dato, la Proposizione 1.30 si rinenuncia al modo seguente.

Teorema 3.15 (eliminazione degli infinitesimi di ordine superiore) In un limite ove compaiano sommati più infinitesimi, si possono cancellare quelli di ordine superiore.

Questo teorema, che formalmente semplifica le forme $0(\pm\infty)$ e $0/0$, in pratica è di scarsa utilità. Anche in questo caso può essere utile una teoria degli ordini con struttura analoga a quella svolta per gli infiniti.

- Si può dare la definizione di infinitesimi dello stesso ordine;
- si può dare la definizione stessa di ordine come classe di equivalenza di infinitesimi;
- si può introdurre la relazione d'ordine \preccurlyeq sull'insieme degli ordini.

In base alle definizioni date sussiste la seguente proprietà.

Proposizione 3.16 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite (risp. infinitesime) in x_0 e $\text{ord}(f) \preccurlyeq \text{ord}(g)$, allora risulta $\text{ord}(1/f) \preccurlyeq \text{ord}(1/g)$.*

3.4.1 Valutazione numerica dell'ordine

In corrispondenza del punto x_0 , si fissa un infinitesimo campione $\epsilon_{x_0}(x)$, coincidente con l'infinitesimo principale di cui ci siamo già occupati.

Definizione 3.17 *Una funzione f è infinitesima di ordine reale $\alpha \in (0, +\infty)$ in x_0 se*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{(\epsilon_{x_0}(x))^\alpha} \right| = \ell \in (0, +\infty).$$

Saranno ancora valide convenzioni analoghe a quelle assunte riguardo gli infiniti, così come continueranno a sussistere analoghe “patologie”.

Riteniamo molto utile che risulti

$$\epsilon_{x_0}(x) = \frac{1}{\omega_{x_0}(x)} \quad (3.4)$$

Una ovvia conseguenza della scelta (3.4) sarà la seguente proposizione.

Proposizione 3.18 *Se $f(x)$ è infinita (risp. infinitesima) in x_0 di ordine reale α , la funzione $1/f(x)$ è infinitesima (risp. infinita) dello stesso ordine.*

In generale se $f(x)$ è infinita (risp. infinitesima) in x_0 con $\text{ord}(f) \leq \alpha$, allora la funzione $1/f(x)$ è infinitesima (risp. infinita) con $\text{ord}(1/f) \leq \alpha$. Ovviamente vale anche un risultato analogo con le disuguaglianze invertite.

3.5 Ordine e operazioni

In questo paragrafo vogliamo studiare come si determina l'ordine di funzioni ottenute tramite operazioni algebriche e composizione.

3.5.1 Prodotti e rapporti

Dobbiamo distinguere due situazioni:

- forme determinate;
- forme indeterminate.

Proposizione 3.19 *Siano f e g due funzioni entrambe infinite (risp. infinite-sime) in x_0 . Se risulta*

$$\begin{aligned}\text{ord}(f) &\leq \alpha, \\ \text{ord}(g) &\leq \beta,\end{aligned}$$

allora $\text{ord}(fg) \leq \alpha + \beta$.

Ovviamente si potrà provare un risultato con tutte le disuguaglianze in senso opposto. Un teorema analogo varrà, inoltre, per le forme determinate

$$\frac{0}{\pm\infty} \quad \text{e} \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

(a meno di tutte le precisazioni richieste affinché i limiti esistano).

Passiamo ora alle forme indeterminate.

Proposizione 3.20 *Siano f e g due funzioni entrambe infinite in x_0 .*

1. *Se*

$$\text{ord}(f) \leq \alpha < \beta \leq \text{ord}(g)$$

allora g/f è infinita e risulta

$$\text{ord}(g/f) \geq \beta - \alpha;$$

2. *Se*

$$\text{ord}(g) \leq \beta < \alpha \leq \text{ord}(f)$$

allora g/f è infinitesima e risulta

$$\text{ord}(g/f) \geq \alpha - \beta.$$

Risultati analoghi a quello precedente valgono per le forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad 0(\pm\infty)$$

(a meno di tutte le precisazioni richieste affinché i limiti esistano).

3.5.2 Funzione composta

Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ e si abbia $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 .

Se risulta

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$$

Vogliamo stimare l'ordine della funzione composta $g(f(x))$.

Dobbiamo distinguere due casi.

1. $y_0 = \pm\infty$

Se $\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \alpha$ e $\text{ord}_{y \rightarrow y_0} g(y) \geq \beta$, allora $\text{ord}_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \geq \alpha\beta$.

2. $y_0 \in \mathbf{R}$

Se $\text{ord}_{x \rightarrow x_0}(f(x) - y_0) \geq \alpha$ e $\text{ord}_{y \rightarrow y_0} g(y) \geq \beta$, allora $\text{ord}_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \geq \alpha\beta$.

Vogliamo osservare che:

- la nozione di ordine, senza ulteriori specificazioni, viene riferita, di volta in volta ad un infinito o ad un infinitesimo;
- sussiste un risultato simmetrico, ottenuto invertendo tutte le disuguaglianze.

Non si ha nessun risultato valido nel caso in cui le due disuguaglianze, riferite agli ordini delle funzioni f (resp. $f - y_0$) e g siano opposte. In particolare nulla si può dire nel caso di composizione di funzioni una con ordine comunque grande e l'altra con ordine comunque piccolo.

Esempio 3.21 La funzione $\log(e^x - 1)$, per $x \rightarrow +\infty$, è infinita di ordine 1. Infatti

$$e^x - 1 \cong e^x \rightarrow +\infty$$

e quindi

$$\log(e^x - 1) \cong \log e^x = x.$$

3.5.3 Somme

A questo proposito dobbiamo distinguere tra infinitesimi ed infiniti:

- la somma di infinitesimi è un infinitesimo e quindi ha senso parlare di ordine;
- la somma di infiniti non è detto che sia un infinito, quindi potrebbe non aver senso parlare di ordine.

Partiamo dal caso degli infiniti.

Proposizione 3.22 Qualora la somma di infiniti si presenti nella forma $f(x) + o(f)$, allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + o(f)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

e

$$\text{ord}(f + o(f)) = \text{ord}(f)$$

quindi l'ordine della somma coincide con il più grande degli ordini degli addendi.

Quindi in una somma di infiniti (del tipo $+\infty - \infty$) prevale il segno dell'infinito di ordine maggiore, ovviamente ammesso che questo esista e che, negli esercizi, lo si riesca ad individuare. Dal punto di vista sostanziale la proposizione precedente non aggiunge nulla a quanto già sapevamo; i risultati enunciati sopra sui prodotti e sulle funzioni composte ora consentono di valutare l'ordine in una più vasta gamma di casi.

In generale abbiamo quanto segue.

Proposizione 3.23 *Una somma di infiniti, se è infinita, ha ordine minore o uguale al più grande degli ordini degli addendi.*

Passiamo brevemente agli infinitesimi.

Proposizione 3.24 *Qualora la somma di infinitesimi si presenti nella forma $f(x) + o(f)$, allora abbiamo*

$$\text{ord}(f + o(f)) = \text{ord}(f),$$

quindi l'ordine della somma coincide con il più piccolo degli ordini degli addendi.

In generale l'ordine di una somma di infinitesimi è maggiore o uguale al più piccolo degli ordini degli addendi.

3.5.4 Esempi

In questi esempi vedremo come si usano le regole sulle operazioni nel calcolo dei limiti.

Esempio 3.25 *Riprendiamo l'esempio 2.8. Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x+\sin x}} \tan x^5.$$

Si tratta di una forma $(+\infty) \cdot 0$.

Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione $x + \sin x \cong 2x$ è infinitesima di ordine 1, quindi, componendo con $\sqrt{\cdot}$ (infinitesima di ordine $1/2$), si ottiene $\sqrt{x + \sin x}$ infinitesima di ordine $1/2$; quindi $1/\sqrt{x + \sin x}$ è infinita di ordine $1/2$; quindi, componendo con \exp (infinita di ordine maggiore di qualunque prefissato $p > 0$) si ottiene $e^{1/\sqrt{x+\sin x}}$ infinita di ordine comunque grande.

D'altra parte x^5 è infinitesima di ordine 5, composta con \tan (infinitesima di ordine 1) abbiamo una funzione infinitesima di ordine 5.

Pertanto nel prodotto prevale il fattore con ordine maggiore, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/\sqrt{x+\sin x}} \tan x^5 = +\infty$$

con ordine maggiore di $p - 5$, per ogni $p > 0$, ossia con ordine comunque grande.

Esempio 3.26 *Riprendiamo l'esempio 2.12. Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x}.$$

Si tratta di una forma $(+\infty)/(+\infty)$.

Abbiamo $x + \sin x \cong x$ infinita di ordine 1; componendo con $(\cdot)^2$ otteniamo $(x + \sin x)^2$ infinita di ordine 2; infine componendo con \exp otteniamo $e^{(x+\sin x)^2}$ infinita di ordine comunque grande.

La funzione $\log x$ è infinita con ordine minore di qualunque prefissato $\epsilon > 0$; pertanto il prodotto $x^6 \log x$ (che è una forma determinata) è infinito con ordine maggiore di 6 ma minore di $6 + \epsilon$.

Pertanto il denominatore è trascurabile rispetto al numeratore e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x+\sin x)^2}}{x^6 \log x} = +\infty$$

con ordine maggiore di $p - 6 - \epsilon$, ossia comunque grande.

Esempio 3.27 *Riprendiamo l'esempio 2.24. Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{(x-2)/(x-1)^2}}{\sin(\pi x) \log^2 x}$$

Sappiamo che si tratta di una forma $0/0$.

La funzione $(x-1)^2$ è infinitesima di ordine 2. Dunque $(x-2)/(x-1)^2 \rightarrow -\infty$ con ordine 2. La funzione 2^x per $x \rightarrow -\infty$ è infinitesima con ordine comunque grande, quindi la funzione composta $2^{(x-2)/(x-1)^2}$ è infinitesima con ordine comunque grande.

Con argomenti standard (vedi svolgimento dell'esempio 2.24) si riconosce che il denominatore è infinitesimo di ordine 3, quindi è trascurabile rispetto al numeratore. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{(x-2)/(x-1)^2}}{\sin(\pi x) \log^2 x} = 0$$

con ordine maggiore di $p-3$, ossia comunque grande.

Nel capitolo precedente abbiamo visto che in molti casi si utilizzano direttamente equivalenze e limiti notevoli. Per le situazioni riprese nei tre esempi di sopra la teoria degli ordini fornisce un linguaggio alternativo, se non più semplice almeno più sintetico. D'altra parte abbiamo visto come questa teoria apra alcune interessantissime problematiche e richieda a monte tutta una serie di risultati astratti. Lasciamo al lettore la scelta della via da seguire e dei linguaggi da utilizzare.